FISICA

CdS Scienze Biologiche

Stefania Spagnolo

Dip. di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi”

http://www.dmf.unisalento.it/~spagnolo

stefania.spagnolo@le.infn.it

(please, usate **oggetto/subject: CdSBiologia**)

Diario del programma e delle lezioni svolte

http://www.dmf.unisalento.it/~spagnolo/Fis_ScienzeBiologiche_2017-18.htm

Lavoro ed energia

Serway, Jewett, "Principi di Fisica"

M. Taiuti, M.T. Tuccio "Appunti di Fisica per Biologia" in
http://www.fisica.unige.it/~biologia/NOfisica.html
(Università di Genova)

LAVORO DELLE FORZE ED ENERGIA

- Definizione di Lavoro e Potenza
- Energia cinetica
- Forze conservative
- Energia potenziale
- Teorema della conservazione dell'energia meccanica
- Esercizi

LAVORO

Lavoro di una forza costante: nell'esempio riportato in figura 12 la risultante delle forze è non nulla ed il corpo si muove verso destra. Immaginiamo che le forze applicate rimangano costanti per un intervallo di tempo Δt durante il quale il corpo si sposta di una quantità $\vec{s}$. Il moto sarà uniformemente accelerato con l'accelerazione orientata nella stessa direzione della risultante delle forze.

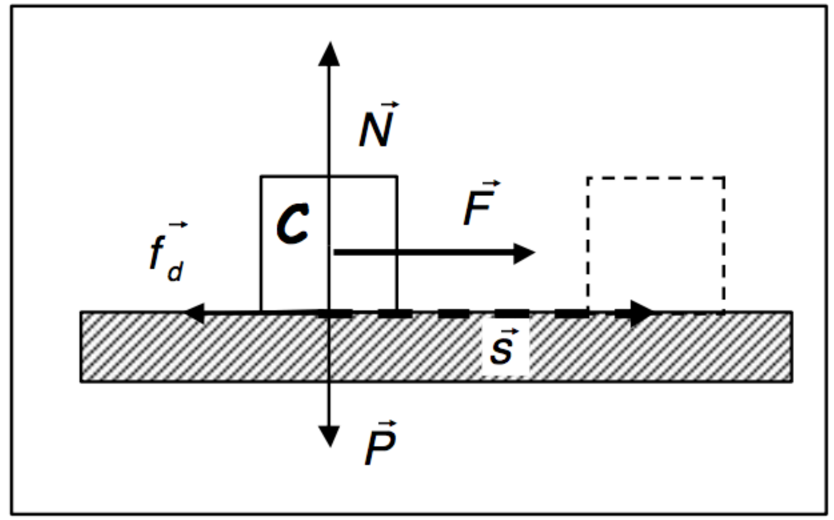
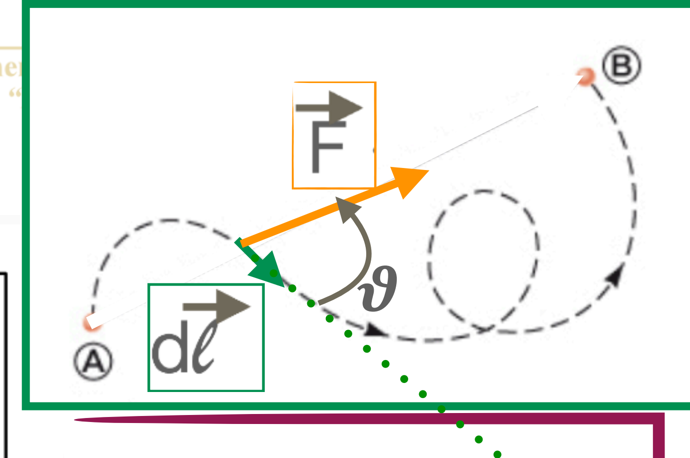


Fig. 12. Definizione di lavoro di una forza.

Possiamo definire il lavoro fatto da una forza $\vec{F}_i$ durante lo spostamento $\vec{s}$ come la seguente quantità scalare $L_i = \vec{F}_i \cdot \vec{s} = F_i s \cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo formato dai vettori $\vec{F}_i$ ed $\vec{s}$. Nell'esempio precedente la forza $\vec{F}$ essendo orientata nella stessa direzione di $\vec{s}$ farà un lavoro positivo pari a $L_F = Fs\cos 0° = Fs$, la forza di attrito statico farà invece un lavoro negativo pari a $L_{fd} = f_d s \cos 180^0 = -f_d s$ mentre il lavoro delle due forze perpendicolari allo spostamento sarà nullo: $L_N = Ns\cos 90° = 0$ e $L_P = Ps\cos 270° = 0$. Il lavoro totale è la somma dei lavori delle singole forze $L = \sum_i L_i$.



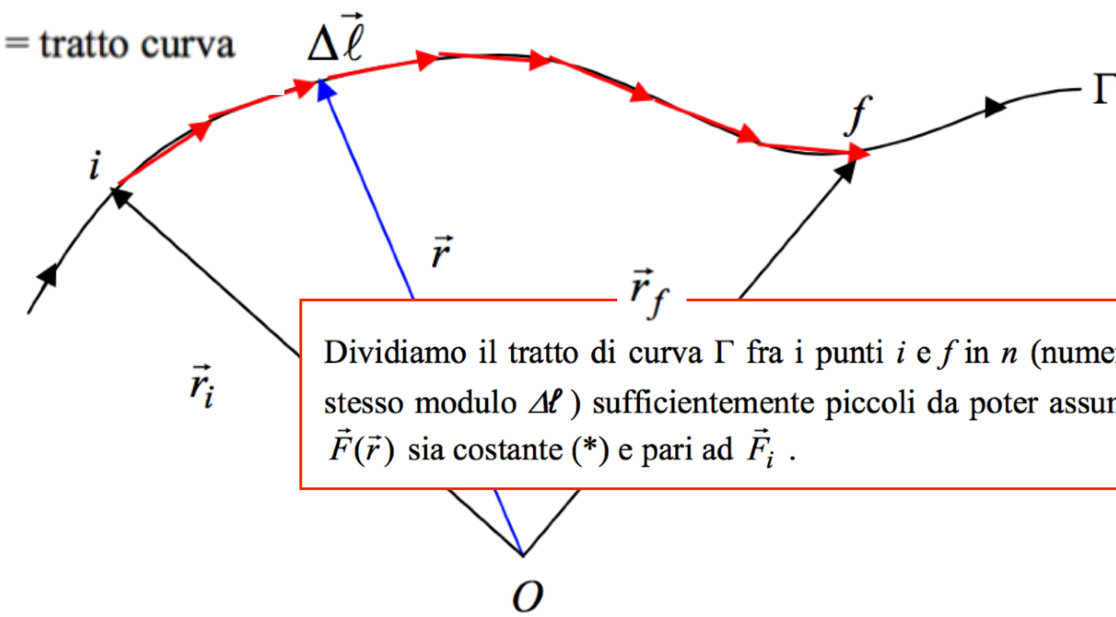
In generale **il lavoro** che compie una forza applicata a un corpo nello spostamento di quest'ultimo dal punto A al punto B **è l'integrale di linea della forza lungo il percorso:**

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

ossia, spezzettato il percorso (orientato) in tratti infinitesimi $d\ell$, si calcola **F dℓ cos ϑ** e si sommano questi termini su tutta la traiettoria

LAVORO

Lavoro di una forza variabile $\vec{F}$ con la posizione $\vec{r}$ per uno spostamento dalla posizione iniziale $\vec{r}_i$ ad una posizione finale $\vec{r}_f$ lungo una curva Γ.



Dividiamo il tratto di curva Γ fra i punti i e f in n (numero intero) di segmenti $\Delta\vec{\ell}_i$ (tutti con lo stesso modulo $\Delta\ell$) sufficientemente piccoli da poter assumere che lungo ciascuno di essi la forza $\vec{F}(\vec{r})$ sia costante (*) e pari ad $\vec{F}_i$.

Possiamo così usare la definizione di lavoro e calcolarlo per ogni tratto $\Delta\vec{\ell}_i$ ossia:

$$W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i$$

Il lavoro totale fra il punto i ed il punto f sarà : $W_{i\to f} = \sum_i W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i$

al limite per $\Delta\ell \to 0$

$W_{i\to f} = \lim_{\Delta\vec{\ell}_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{\ell}_i = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, ottenendo il così detto **integrale di linea** di $\vec{F}(\vec{r})$ lungo la linea Γ fra i punti individuati da $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$.

La grandezza $d\vec{\ell}$ è un elemento piccolissimo (infinitesimo) dello spostamento lungo la linea Γ.

Più in generale **il lavoro** che compie una forza applicata a un corpo nello spostamento di quest'ultimo dal punto A al punto B **è l'integrale di linea della forza lungo il percorso:**

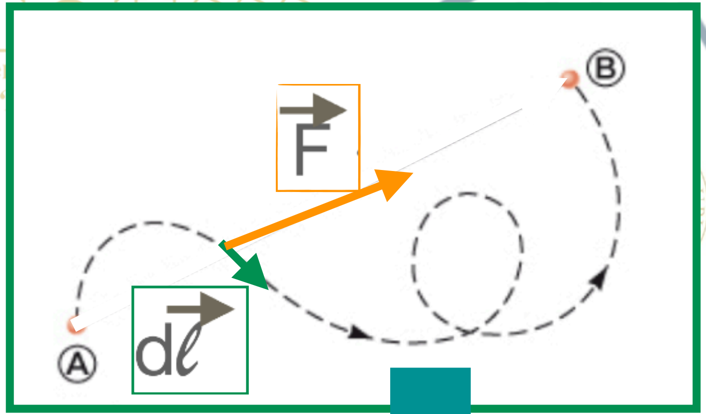
$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

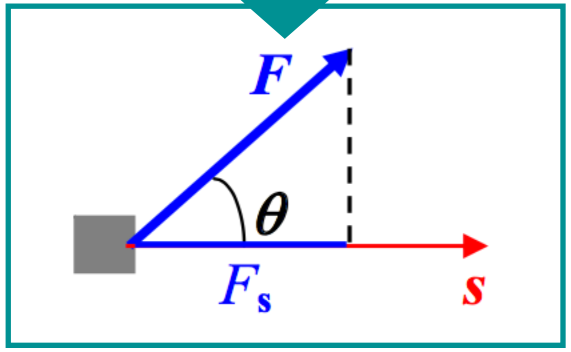
ossia, spezzettato il percorso (orientato) in tratti infinitesimi $d\ell$, si calcola **F $d\ell$ cos ϑ** e si sommano questi termini su tutta la traiettoria

LAVORO

Il lavoro è quindi una grandezza scalare le cui unita di misura sono:

$$N \cdot m = \frac{Kgm}{s^2} m = \frac{kgm^2}{s^2} = kg\left(\frac{m}{s}\right)^2 = Joule = J$$





Interpretazione fisica

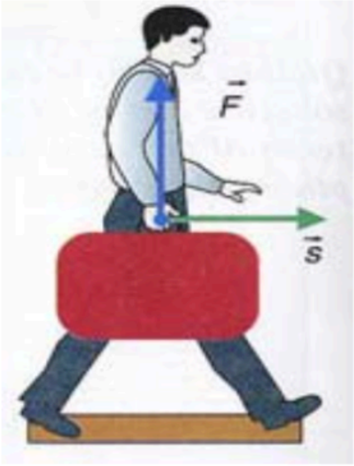
torniamo al caso di forza costante e percorso rettilineo

a) A parità di forza e spostamento in modulo, si ottiene il lavoro massimo se la forza è parallela allo spostamento $(\theta = 0, \cos\theta = 1)$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta = F \cdot s$$

b) Una forza perpendicolare allo spostamento $(\theta = \pi/2, \cos\theta = 0)$ compie sempre un lavoro nullo:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\theta = (F\cos\theta) \cdot s = F_s \cdot s = 0$$

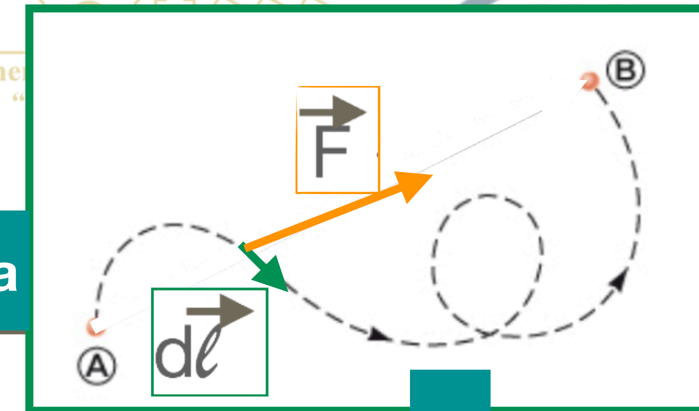


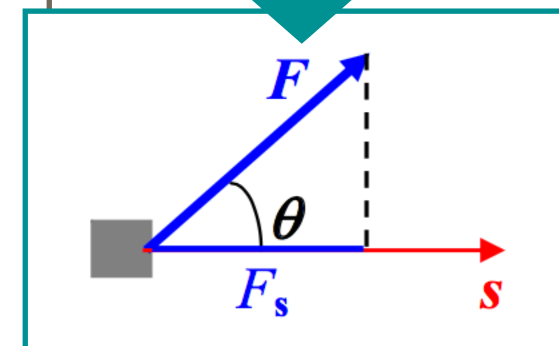
Portando una valigia orizzontalmente, la forza esercitata dal braccio non effettua lavoro!

Un altro esempio di lavoro nullo si ha nel moto circolare uniforme, in cui la forza centripeta è in ogni istante perpendicolare alla velocità e quindi allo spostamento.

LAVORO

Interpretazione fisica

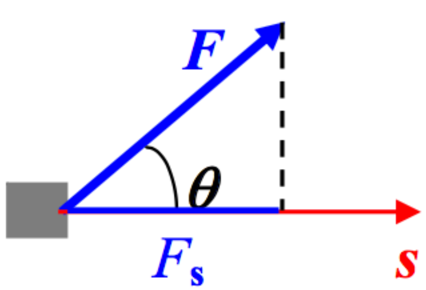


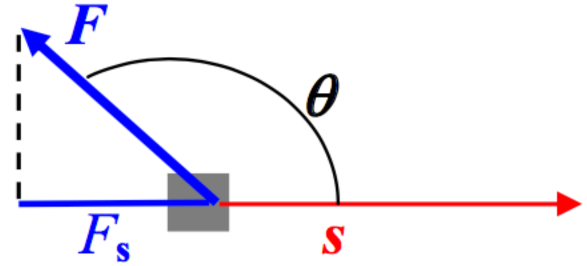


c) Se lo spostamento è nullo, $\vec{s} = 0$, il lavoro fatto dalla forza è nullo.

Una persona sostenendo una massa da fermo non compie lavoro.

d) Il lavoro può essere positivo o negativo.

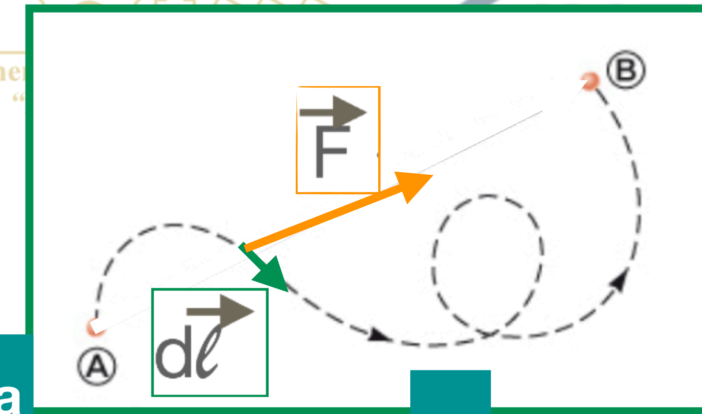




$0 < \theta < \pi/2$, $\cos\theta > 0$
***W* > 0**, forza parzialmente responsabile del moto
lavoro **motore**, cioè, favorevole al moto

$\pi/2 < \theta < \pi$, $\cos\theta < 0$
***W* < 0**, forza non responsabile del moto
lavoro **resistente**, cioè, contrario al moto

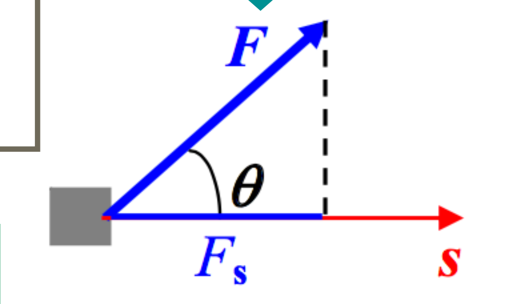
LAVORO



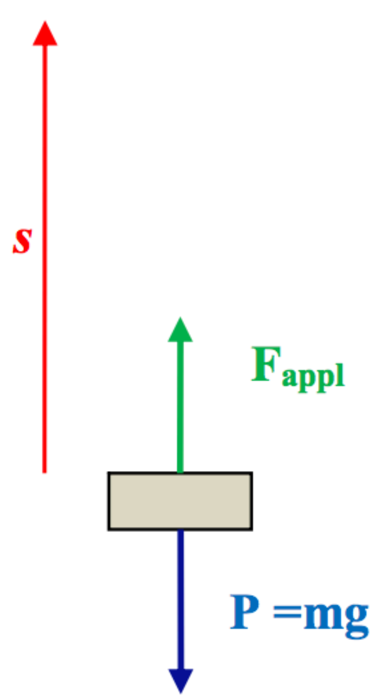
Interpretazione fisica

$$W_{TOT} = \sum_i W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{s} = \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot \vec{s} = \vec{F}_R \cdot \vec{s} \quad \text{con } \vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i$$ la risultante delle forze agenti sul corpo.

Il lavoro della forza risultante è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti sul corpo.



Un esempio: sollevamento verticale di una massa *m* a velocità costante.



$$\vec{v} = \text{cost} \Rightarrow \vec{F}_{appl} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{appl} = -\vec{P}$$

Lavoro di $\vec{F}_{appl} = W_{appl} = \vec{F}_{appl} \cdot \vec{s} = F_{appl} s = mgs$,
positivo perché è $\vec{F}_{appl}$ ad imprimere il moto ($\vec{F}_{appl}$ stesso verso di $\vec{s}$)

Lavoro di $\vec{P} = W_P = \vec{P} \cdot \vec{s} = -Ps = -mgs$,
negativo perchè $\vec{F}_{appl}$ non è responsabile del moto($\vec{F}_{appl}$ verso opposto ad $\vec{s}$)

Lavoro totale: $W_{tot} = W_{appl} + W_P = mgs - mgs = 0$

POTENZA

Può essere importante confrontare il lavoro prodotto da una forza con il tempo impiegato per ottenerlo. Per questo scopo si introduce il concetto di **potenza** che **misura la rapidità con cui è compiuto il lavoro.**

La **potenza** $\boxed{P = \frac{L}{\Delta t}}$ rappresenta il lavoro fatto nell'unità di tempo. Si misura in **Watt** (W) nel sistema **SI**

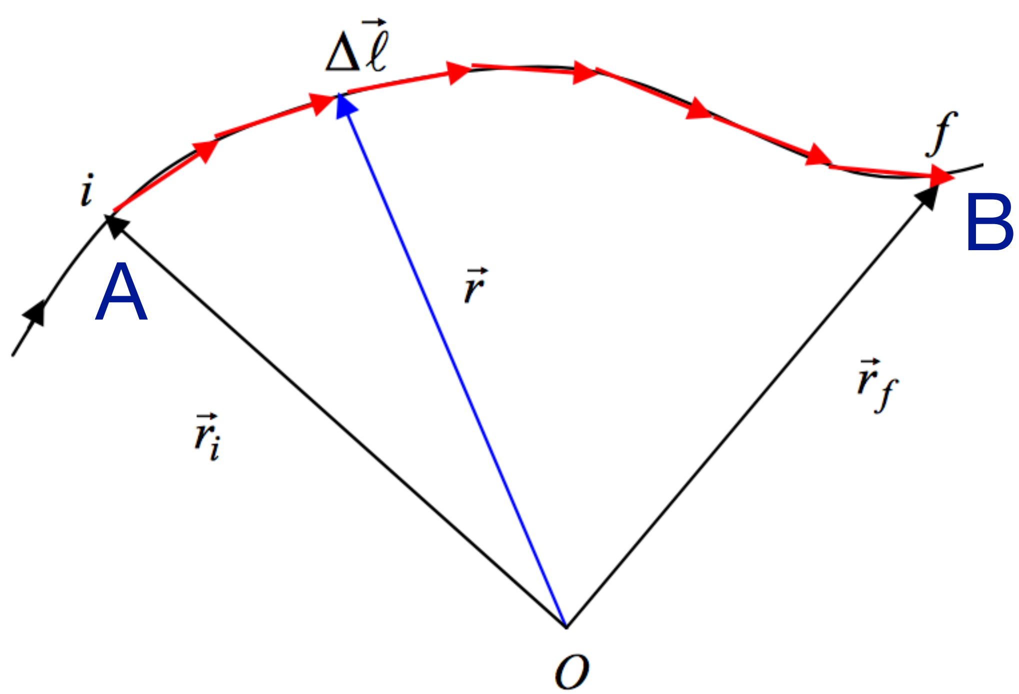
Per Δt molto piccolo, al limite per $\Delta t \to 0$ si ottiene la potenza istantanea (di seguito semplicemente potenza) :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

NOTA: caso F costante

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \qquad P = \vec{F} \cdot \vec{v} \text{ per } \vec{F} = cost$$

LAVORO E TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA



NOTA: $\Delta\vec{\ell} = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i = \Delta\vec{r}$

$$W_{A\to B} = \int_{A_\gamma}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Dal secondo principio della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

dove **v** è la velocità istantanea della particella

Quindi con le dovute sostituzioni si ha

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r} = md\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = md\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \boxed{2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

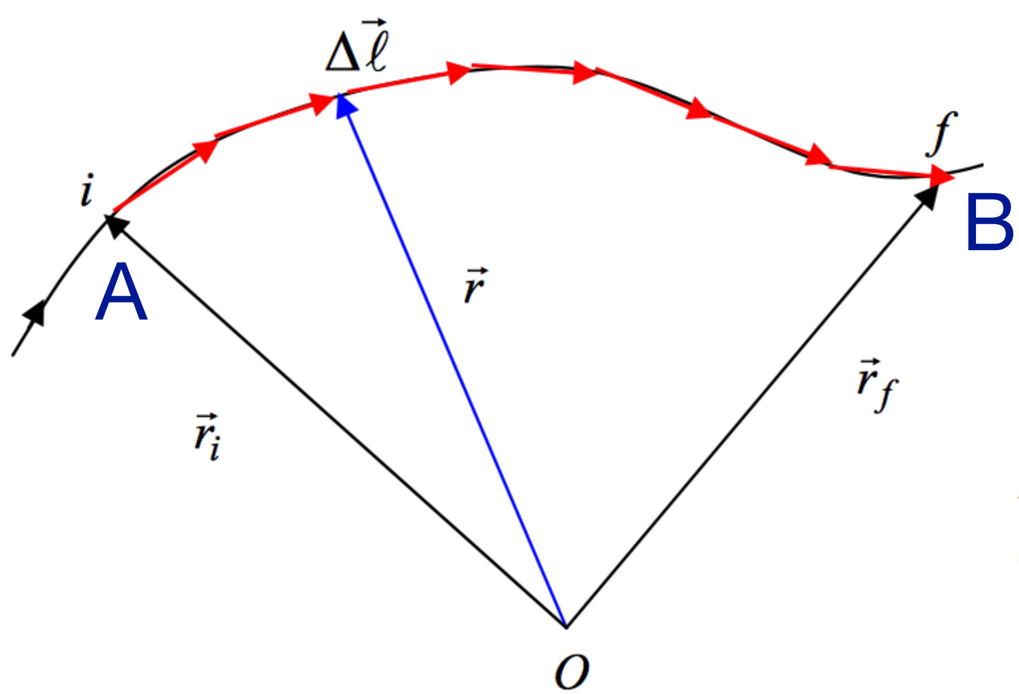
$$\downarrow$$

$$\frac{d|v|^2}{dt} = \frac{d(v^2)}{dt} = \boxed{2v\frac{dv}{dt}}$$

$$d\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}d(v^2)$$

$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}m\int_{v_A}^{v_B} d(v^2) = \frac{1}{2}m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m\,v_A^2$$

LAVORO E TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA



Definiamo **K = mv²/2**

ENERGIA CINETICA

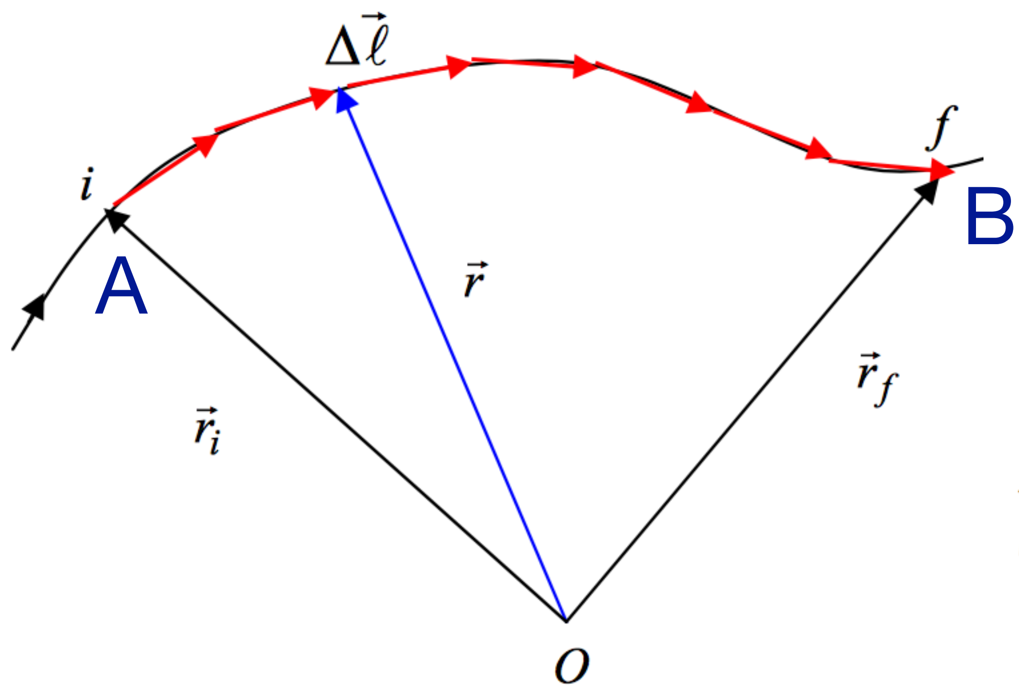
$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

Il lavoro compiuto da una forza su una particella (punto materiale) che si sposta da A a B
è uguale alla variazione di energia cinetica della particella K_B - K_A

Si fa notare che se W > 0 anche ΔK è maggiore di zero, ciò vuol dire che il lavoro è stato effettuato dalla forza sulla particella ed è stato accumulato come aumento dell'energia cinetica della particella stessa. Invece, se W < 0 anche ΔK è minore di zero, in questo caso il lavoro è stato effettuato dalla particella sull'ambiente circostante, a spese dell'energia cinetica posseduta inizialmente, la quale infatti si riduce.

Osserva: Lavoro (F dr) ed energia cinetica (mv²) hanno le stesse dimensioni

LAVORO E TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA



Definiamo **K = mv²/2**

ENERGIA CINETICA

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

Il lavoro compiuto da una forza su una particella (punto materiale) che si sposta da A a B

è uguale alla variazione di energia cinetica della particella K_B - K_A

Il lavoro compiuto da una forza su un sistema che si sposta da A a B ***è uguale alla variazione di energia cinetica del sistema***, K_B - K_A, ***se l'unico cambiamento che avviene nel sistema è la variazione del modulo della velocità***

ENERGIA CINETICA

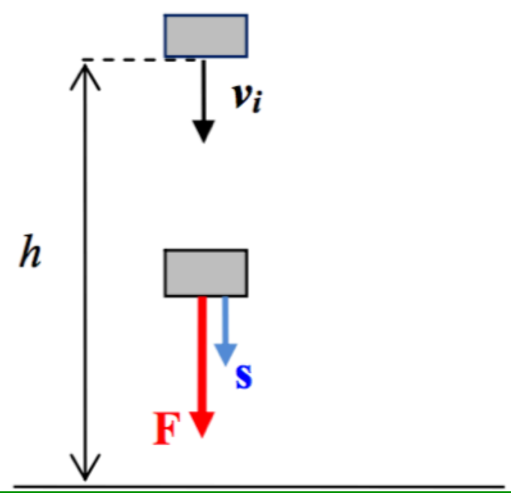
Questo ci permette di introdurre il concetto generale di **ENERGIA**: essa è una grandezza scalare, che si manifesta in numerose forme (o tipi) associabile allo stato di un sistema e rappresenta la capacità del sistema di produrre lavoro.

L'energia cinetica è l'energia associata allo stato di moto un sistema (corpo) ovvero la capacità di un corpo m dotato di velocità di produrre lavoro. Maggiore è la velocità, a parità di m, maggiore è l'energia cinetica, maggiore il lavoro che il corpo può dare.

Il teorema dell' energia cinetica (eq. 5) evidenzia che se il lavoro delle forze agenti è positivo, esso è "fatto sul corpo" e l'energia cinetica del corpo aumenta. Se il lavoro è negativo, esso è "fatto dal corpo" per vincere le forze applicate e quindi l'energia cinetica del corpo diminuisce. Chiariamo questo con due esempi.

ENERGIA CINETICA

Esempio 1): Massa m in caduta libera lasciata da una altezza h da un piano con velocità $\vec{v}_i$ verticale verso il basso.



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s = mgh > 0$$

$$\Delta K = W \Rightarrow K_f - K_i = mgh > 0$$

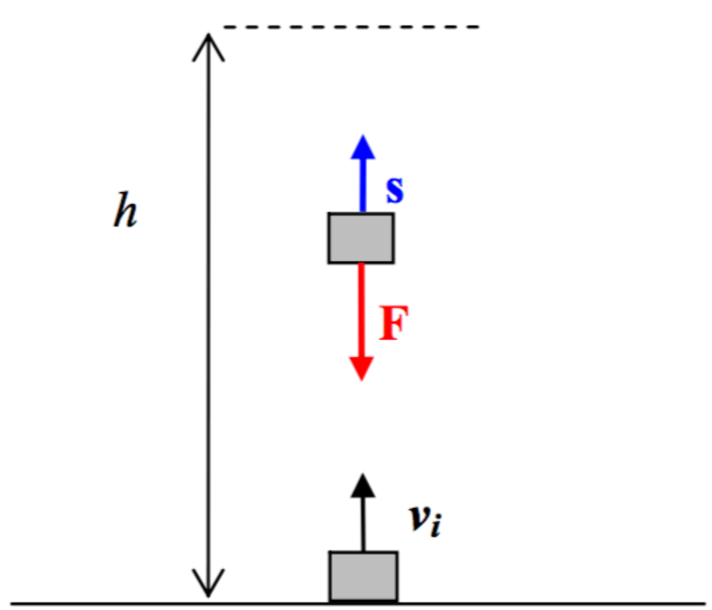
$$K_f > K_i \Rightarrow$$

Lavoro positivo compiuto dalla forza energia cinetica aumenta:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_f^2 > \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow v_f > v_i}$$

Esempio 2): Massa m lanciata, dal suolo, verticalmente verso l'alto con velocità $\vec{v}_i$.

Sia h l'altezza della massa quando la velocità è $\vec{v}_f$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\pi = -mgh < 0$$

$$\Delta K = W \Rightarrow K_f - K_i = -mgh < 0$$

$$K_f < K_i \Rightarrow$$

Lavoro negativo, energia cinetica diminuisce:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_f^2 < \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow v_f < v_i}$$

ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

Immaginiamo un sistema di N particelle che numero con un indice *i* che varia da *1* a *N*

$$\Delta K_i = K_i^{fin} - K_i^{iniz} = W_i = W_i^{est} + W_i^{int}$$

Nel sistema ciascuna particella *i* è soggetta a forze esterne F^{est} (esercitate da corpi esterni al sistema) e a forze interne F^{int} (esercitate dalle altre particelle del sistema). Il lavoro compiuto sulla particella i sarà la somma del lavoro compiuto dalle forze esterne W^{est} e del lavoro compiuto dalle forze interne W^{int}

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$

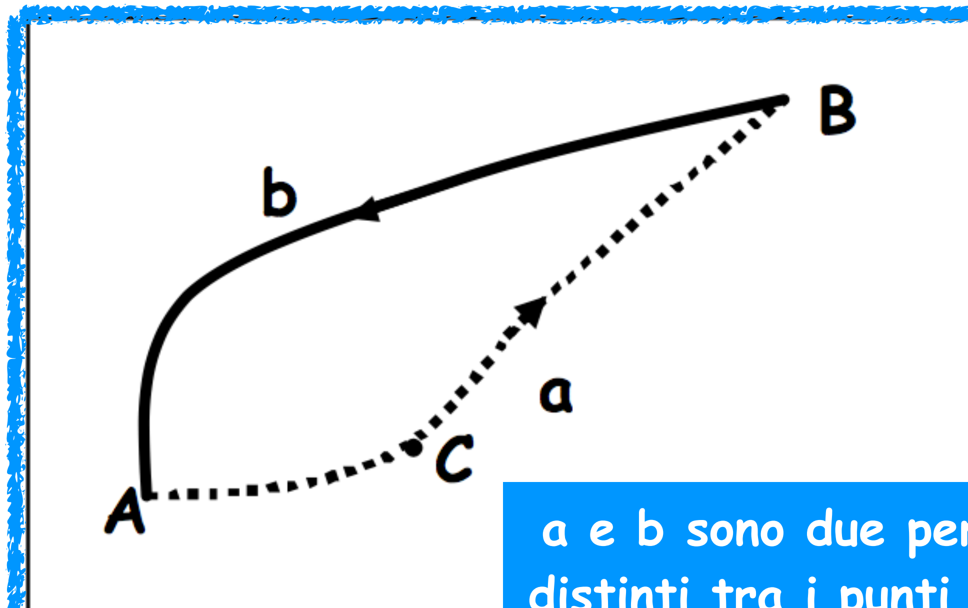
La variazione di energia cinetica complessiva del sistema è la somma delle variazioni delle energie cinetiche per ciascuna particella; se ne deduce l'espressione generalizzata del Teorema dell'energia cinetica

$$\boxed{\Delta K = \sum_{i=1}^{n} \Delta K_i = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n}(W_i^{est} + W_i^{int}) = \sum_{i=1}^{n} W_i^{est} + \sum_{i=1}^{n} W_i^{int}}$$

LAVORO ED FORZE CONSERVATIVE

Proprietà (vedi figura 13): a) per una qualunque traiettoria, il lavoro fatto dalla forza durante uno spostamento da un punto A ad un punto B lungo una traiettoria è uguale ma di segno opposto al lavoro fatto durante lo spostamento inverso da B ad A lungo la stessa traiettoria: $L^{(a)}_{A\to B} = -L^{(a)}_{B\to A}$; b) il lavoro è additivo: $L^{(a)}_{A\to B} = L^{(a)}_{A\to C} + L^{(a)}_{C\to B}$.

Forze conservative: consideriamo lo spostamento raffigurato in figura 13 dal punto A fino al punto B lungo l'itinerario a e ritorno ad A lungo l'itinerario b in presenza di una forza $\vec{F}$. Se il lavoro della forza calcolato lungo tutto l'itinerario è nullo $L^{(a)}_{A\to B} + L^{(b)}_{B\to A} = 0$, e tale rimane anche cambiando uno dei due itinerari o la posizione del punto B allora $\vec{F}$ è conservativa.



a e b sono due percorsi distinti tra i punti A e B

Fig. 13. Traiettorie e lavoro di una forza.

Forze Conservative

Energia potenziale: si può dimostrare che per una forza conservativa valgono le seguenti proprietà:

a) il lavoro NON dipende dall'itinerario che collega A a B, cioè $L^{(a)}_{A\to B} = L^{(b)}_{A\to B}$;

b) si può definire l'energia potenziale in un qualunque punto dello spazio come una funzione delle coordinate del punto $U(x,y,z)$;

c) l'espressione dell'energia potenziale dipende dalla forza;

d) se sono presenti più forze conservative, l'energia potenziale in un punto è la somma delle energie potenziali di ogni singola forza;

e) dati i tre punti A, B e C dell'esempio precedente vale la seguente relazione: $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB}$.

f) il lavoro dipende solo dalla differenza dei valori dell'energia potenziale calcolata nei punti A e B: $L^{(a)}_{A\to B} = U(A) - U(B) \equiv -\Delta U_{BA}$

FORZE CONSERVATIVE

Consideriamo una forza esercitata su un punto materiale in una direzione e uno spostamento mono-dimensionale lungo la stessa direzione

* $W_{A\rightarrow B} = L_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = U(A)-U(B)$
* $F(x) = -dU(x)/dx$

Esempi di forze conservative	
Forza peso	$U(h) = Mgh$
Forza gravitazionale	$U(r) = -G\frac{M_1M_2}{r}$
Forza elastica	$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$
Forza di Coulomb	$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}$

h=y (asse punta verso l'alto); $\vec{F} = -Mg\,\hat{y}$

$\vec{F} = -GM_1M_2/r^2\,\hat{r}$

$\vec{F} = -k\,x\,\hat{x}$

$\vec{F} = \;k\,q_1q_2/r^2\,\hat{r}$

FORZE CONSERVATIVE E CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

si può dimostrare il **teorema della conservazione dell'energia meccanica**

infatti $L^{(a)}_{A\to B} = U(A) - U(B) \equiv -\Delta U_{BA}$ ma dal teorema lavoro energia cinetica

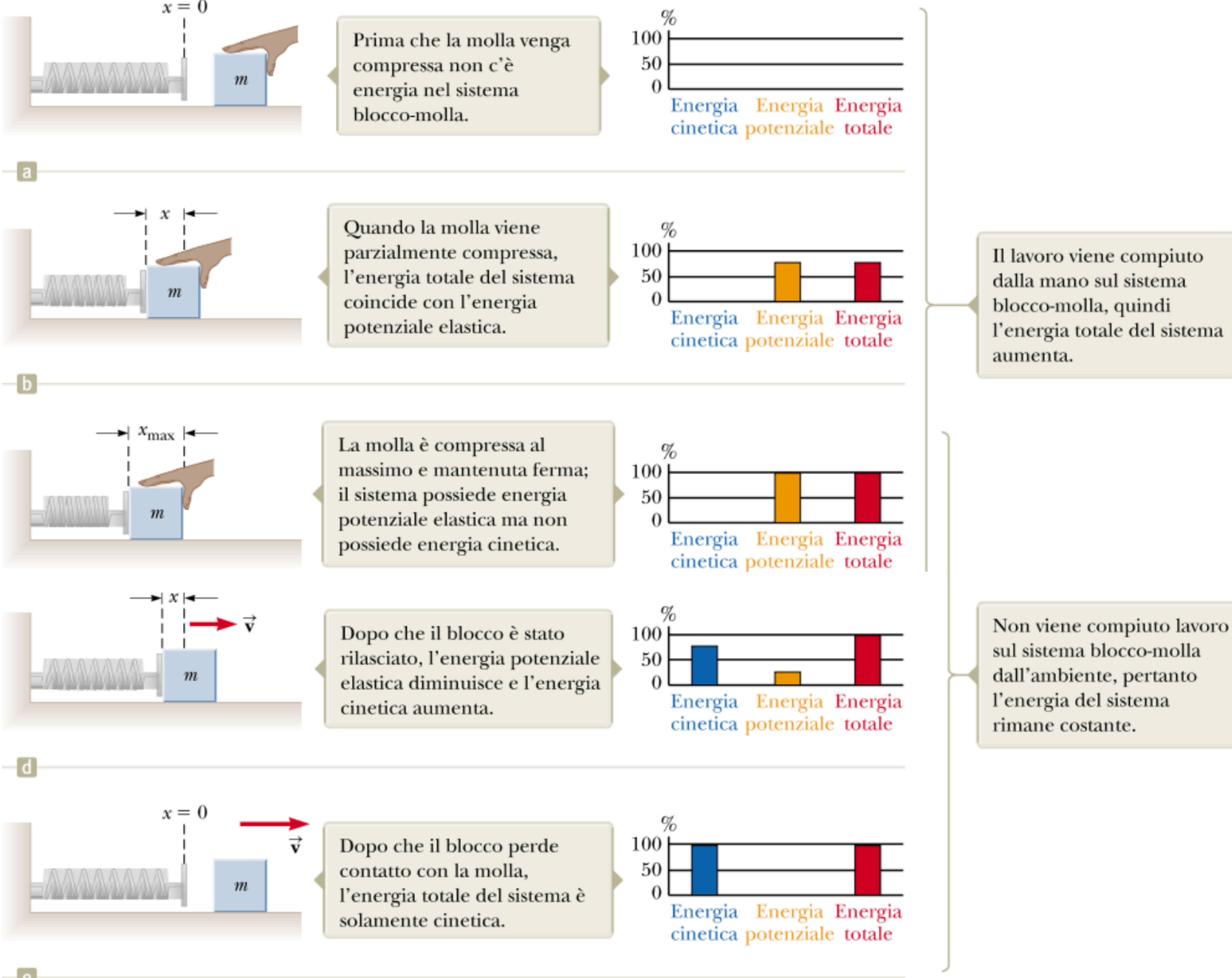
$L^{(a)}_{A\to B} = K_B - K_A \equiv \Delta K_{AB}$ pertanto $\boxed{K_A + U(A) = K_B + U(B)}$

Definiamo **Energia Meccanica E** = **K + U = mv²/2 + U** somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

Se su una particella agisce una forza conservativa, l'energia meccanica si conserva

[si possono modificare i valori di energia cinetica e di energia potenziale individualmente ma l'energia meccanica (energia totale) non è dissipata]

ANALIZZIAMO UNA SITUAZIONE



IN PRESENZA DI FORZE NON CONSERVATIVE

In presenza anche di forze non conservative il teorema della conservazione dell'energia può essere riscritto considerando che per il teorema lavoro-energia cinetica il lavoro fatto da tutte le forze presenti è uguale alla variazione di energia cinetica e sostituendo, per tutte le forze conservative, l'espressione del lavoro con la differenza d'energia potenziale:

$$\Delta K = L_{tot} = L_c + L_{nc} = -\Delta U + L_{nc}$$

ovvero $\Delta K + \Delta U = L_{nc}$ che equivale a $L_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$.

dove U rappresenta la somma delle energie potenziali di tutte le forze conservative presenti, mentre L_{nc} rappresenta il lavoro di tutte le forze non conservative. Se definiamo l'**energia meccanica** E come $\boxed{E = K + U}$ l'espressione precedente diventa:

$\boxed{E_f - E_i = L_{nc}}$.

ENERGIA E FORZE

Esercizi

2. Una molla di costante $k = 3\text{N/m}$ è posta in verticale ed al suo estremo è sospesa una massa $M = 30\text{g}$. La molla è inizialmente a riposo ($x_i = 0$) e la massa viene lasciata libera di cadere con velocità iniziale $v_i = 0$. Calcolare il massimo allungamento della molla.

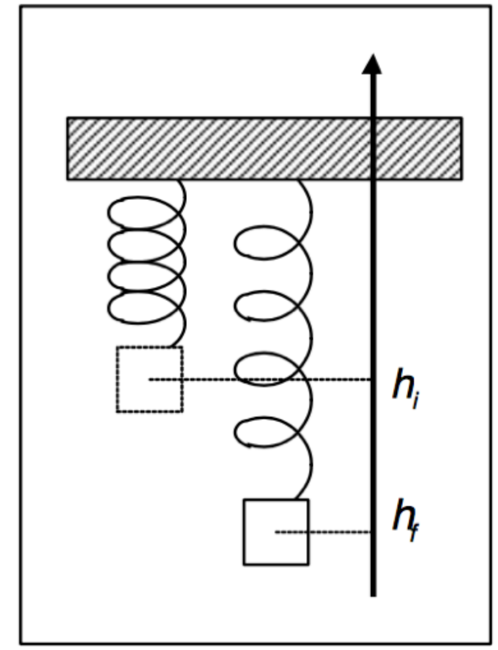


Fig. 14. Problema 2.

Soluzione: poiché siamo in presenza di forze conservative (forza peso e forza elastica della molla) è sufficiente calcolare l'energia del sistema E pari alla somma dell'energia cinetica e delle energie potenziali $E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh + \frac{1}{2}kx^2$, imporre che E rimanga costante $E_f = E_i$ ed osservare che nella posizione finale il massimo allungamento della molla $x_f = h_i - h_f$ corrisponderà a $v_f = 0$.

	U_{molla}	U_{peso}	K
istante iniziale	$\frac{1}{2}kx_i^2$	Mgh_i	$\frac{1}{2}Mv_i^2$
istante finale	$\frac{1}{2}kx_f^2$	Mgh_f	$\frac{1}{2}Mv_f^2$

Avremo quindi $\frac{1}{2}Mv_f^2 + Mgh_f + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2$ da cui imponendo le condizioni $x_i = 0$, $v_i = 0$ e $v_f = 0$ si ricava $-Mg(h_i - h_f) + \frac{1}{2}kx_f^2 = 0$.

A questo punto è necessario osservare che la differenza di altezza del peso $h_i - h_f$ è pari al massimo allungamento della molla x_f e l'equazione avrà come soluzione non nulla:

$$x_f = \frac{2Mg}{k} = \frac{2 \times 30 \cdot 10^{-3}\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2}{3\text{N/m}} = 0.196\text{m}.$$

ENERGIA E FORZE

Esercizi

4. Un sasso di massa $M = 10\,g$ viene lanciato in verticale verso l'alto con una fionda. Sapendo che per far raggiungere l'altezza massima di $h_f = 3\,m$ la fionda deve essere allungata di $x_i = 10\,cm$, calcolare la costante elastica della fionda. (trattare la fionda come una molla).

Soluzione: poiché siamo in presenza di forze conservative (forza peso e forza elastica della fionda) è sufficiente calcolare l'energia del sistema E pari alla somma dell'energia cinetica e delle energie potenziali $E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh + \frac{1}{2}kx^2$, imporre che E rimanga costante $E_f = E_i$ ed osservare che l'energia cinetica del sasso è nulla sia al momento iniziale che a quello finale e che la fionda non essendo più sollecitata dopo il lancio del sasso, rimane nella sua posizione di riposo.

	U_{molla}	U_{peso}	K
istante iniziale	$\frac{1}{2}kx_i^2$	Mgh_i	$\frac{1}{2}Mv_i^2$
istante finale	$\frac{1}{2}kx_f^2$	Mgh_f	$\frac{1}{2}Mv_f^2$

Avremo quindi $\frac{1}{2}Mv_f^2 + Mgh_f + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}Mv_i^2 + Mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2$ da cui imponendo le condizioni $h_i = 0$, $v_i = 0$, $x_f = 0$ e $v_f = 0$, si ricava $Mgh_f - \frac{1}{2}kx_i^2 = 0$ da cui:

$$k = \frac{2mgh_f}{x^2} = \frac{2 \times 10 \times 10^{-3}\,kg \times 9.8\,m/s^2 \times 3\,m}{(10 \times 10^{-2}\,m)^2} \Rightarrow .$$

$$k = 58.8\,N/m$$

ENERGIA E FORZE

Esercizi

5. Un corpo di massa $M = 3\,kg$ viene lanciato su per un piano inclinato di un angolo $\theta = 20°$ sull'orizzontale, con velocità iniziale $v_0 = 3.3\,m/s$. Se il coefficiente di attrito dinamico tra il corpo ed il piano è $\mu_d = 0.2$ determinare lo spazio percorso prima di fermarsi.

Soluzione: poiché non siamo in presenza di sole forze conservative è necessario calcolare la variazione dell'energia meccanica del sistema E pari alla somma dell'energia cinetica e delle energie potenziali $E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh$, imporre che $\Delta E = E_f - E_i$ sia pari al lavoro fatto dalla forza di attrico dinamico $L_{attrito} = -\mu_d Mgs\cos\theta$.

	U_{peso}	K
istante iniziale	Mgh_i	$\frac{1}{2}Mv_i^2$
istante finale	Mgh_f	$\frac{1}{2}Mv_f^2$

Avremo quindi, osservando che la velocità finale è nulla e che $(h_f - h_i) = s \times \sin\theta$:

$$E_f - E_i = L_{attrito} \Rightarrow Mgh_f - Mgh_i - \frac{1}{2}Mv_i^2 = -\mu_d Mgs\cos\theta$$

$$(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)gs = \frac{1}{2}v_i^2 \Rightarrow$$

$$s = \frac{v_i^2}{2(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)g} = \frac{(3.3\,m/s)^2}{2(\sin 20° + 0.2\times\cos 20°)\times 9.8\,m/s^2} = 1.05\,m$$