Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 48 - a.a. 2022-2023

***Quesito 1* (fino a 10)**

Una sfera di materiale isolante e raggio R_0 possiede una densità di carica elettrica dipendente dal raggio r, $\rho(r) = -\alpha r^2$. Un guscio sferico metallico neutro, di raggio interno $2R_0$ e raggio esterno $3R_0$ ha centro coincidente con la sfera carica. Calcolare la densità di carica elettrica σ_{ext} sulla superficie esterna della sfera metallica e la differenza di potenziale elettrostatico tra un punto a distanza dal centro $4R_0$ e un punto a distanza $5R_0$. Si calcoli inoltre la differenza di potenziale tra il guscio metallico e la superficie esterna della sfera carica.
Si utilizzino i valori: $R_0 = 2\ \text{m}; \quad \alpha = 5\ \mu\text{C/m}^5$.

Le sorgenti hanno simmetria sferica, pertanto il potenziale e il campo elettrostatico dipenderanno solo dalla distanza dal centro di simmetria del sistema in cui collochiamo l'origine del sistema di riferimento e il campo elettrico, perpendicolare alle superfici di livello del potenziale (sfere), sarà diretto come $\hat{r}$. Quindi $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, $\phi = \phi(r)$. Chiamata Q_0 la carica totale sulla sfera isolante,

$$Q_0 = -\alpha \int_0^{R_0} r^2\ 4\pi r^2\ dr = -\alpha \frac{4\pi}{5} {R_0}^5 = -5 \times 10^{-6} \frac{4\pi}{5} 2^5 = -0.4 \times 10^{-3} C.$$

Sul conduttore cavo la carica totale e' nulla, sulla superficie interna sara' indotta una quantita' di carica uguale a $Q_{S_{int}} = -Q_0$. Quindi sulla superficie esterna la carica sara' $Q_{S_{est}} = Q_0$ e questa sara' distribuita in modo uniforme (data la simmetria sferica del problema), pertanto

$$\sigma_{ext} = Q_0/(4\pi R^2_{S_{ext}}) = Q_0/(36\pi R_0^2) = -\frac{0.4 \times 10^{-3}}{36\pi\ 4} = -8.84 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^2.$$

Il potenziale elettrostatico (e il campo elettrico) all'esterno (quindi a distanza $4R_0$ e $5R_0$) ha la forma Coulombiana (siamo all'esterno di una distribuzione di carica a simmetria sferica), quindi a distanza generica dal centro $\phi(r) = Q_{tot}/(4\pi\epsilon_0 r) = Q_0/(4\pi\epsilon_0 r)$. Pertanto,

$$\phi(4R_0) - \phi(5R_0) = \int_{4R_0}^{5R_0} \vec{E} \cdot dr\hat{r} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{4R_0} - \frac{1}{5R_0}\right) =$$
$$-9 \times 10^9 \times 0.4 \times 10^{-3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) = -3.6 \times 10^6 (0.125 - 0.1) = -90\ \text{kV}$$

Il potenziale del guscio metallico sara' (in ogni punto, conduttore all'eq. elettrostatico)
$\phi_{conduttore}(r) = Q_0/(12\ \pi\epsilon_0 R_0),\ \forall r\ \ 2R_0 < r < 3R_0$.

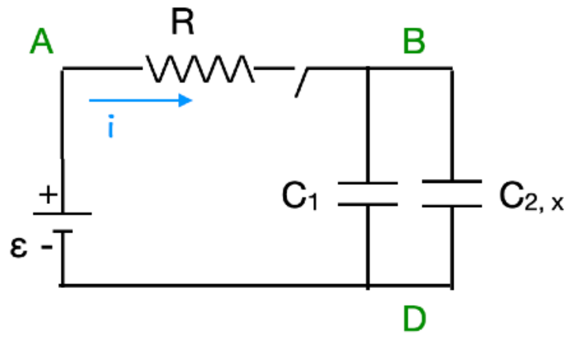
$\phi(2R_0) - \phi(R_0) = -\int_{R_0}^{2R_0} \vec{E}_{cavita'} \cdot d\vec{l}$. il campo nella cavita', a r generico (tra R0 e 2R0), puo' essere ottenuto con la legge di gauss applicata a una superficie sferica di raggio r, Σ, quindi

$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma E(r)\hat{r} \cdot ds\hat{r} = 4\pi r^2 E(r)$ e la carica interna a Σ e' pari a Q_0, quindi

$\vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$. Pertanto, $\phi(2R_0) - \phi(R_0) = -\int_{R_0}^{2R_0} \vec{E}_{cavita'} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2R_0} - \frac{1}{R_0}\right) =$

$$-9 \times 10^9 \times 0.4 \times 10^{-3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 9 \times 10^5 V = 0.9\ \text{MV}.$$

Quesito 2 (fino a 12 punti)
Si consideri un circuito composto dai seguenti elementi disposti in serie: un resistore R, un interruttore inizialmente aperto un generatore di tensione ε e due condensatori, C_1 e C_2, questi ultimi collegati in parallelo tra di loro. Si disegni il circuito, si scriva l'equazione che governa l'evoluzione nel tempo della corrente a partire dall'istante di tempo in cui l'interruttore è chiuso e si determini (o si discuta) la soluzione di tale equazione. Dopo quanto tempo la corrente è ridotta a una frazione pari a 1/10 del valore iniziale ? Quanto vale la carica a regime sulle armature del condensatore C_2 ?
Siano: $\epsilon = 5$ V, $C_1 = 6\ \mu$F, $C_2 = 4\ \mu$F, $R = 100\ \Omega$.
Si consideri un circuito analogo in cui il condensatore C_2 è sostituito da un condensatore di capacità incognita C_x. Si osserva che quando il condensatore di capacità incognita è riempito di un mezzo dielettrico con costante dielettrica relativa pari a $\epsilon_r = 4$ il tempo caratteristico del circuito raddoppia. Si calcoli quindi il valore di C_x.



Il circuito descritto nel problema e' rappresentato in figura. All'istante di tempo t=0 l'interruttore viene chiuso. L'eq del circuito e' $\phi(A) - \phi(D) = \epsilon = (\ \phi(A) - \phi(B)\ ) + (\ \phi(B) - \phi(D)\ ) =$ $= Ri(t) + Q(t)/C_{eq}$ dove $C_{eq} = C_1 + C_{2,x}$ (si intenda C2 o Cx a seconda delle due parti dell'esercizio) e Q(t) = $\int_0^t dt'\ i(t')$ e' la carica totale accumulata all'istante di tempo generico t sulle armature dei due condensatori al nodo B. Infatti i due condensatori sono in parallelo e la capacita' equivalente e' la somma delle capacita' individuali.
L'eq $\epsilon = Ri(t) + Q(t)/C_{eq}$ puo' essere riscritta in termini della sola corrente i indicata in figura calcolando la derivata a sinistra e a destra: $0 = R\frac{di}{dt}(t) + i(t)/C_{eq}$ da cui $\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC_{eq}}dt$ e quindi $i(t) = i_0 e^{-t/(RC_{eq})}$. La costante i_0 rappresenta la corrente al tempo t=0, immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore ed e' determinabile considerando l'eq $\epsilon = Ri(t) + Q(t)/C_{eq}$ al tempo t=0, quando la carica $Q(t=0) = 0$, quindi $\epsilon = Ri(t=0) = Ri_0$. In definitiva $i(t) = \frac{\epsilon}{R}e^{-t/(RC_{eq})}$. Quindi se al tempo $\tilde{t}$ la corrente sara' 1/10 del valore iniziale possiamo scrivere che $i(\tilde{t}) = \frac{\epsilon}{10\ R} = \frac{\epsilon}{R}e^{-\tilde{t}/(RC_{eq})}$.
$\frac{1}{10} = e^{-\tilde{t}/(RC_{eq})}$ ossia $\tilde{t} = -RC_{eq}\ \ln(1/10) = 2.3 \times 10^{-3}$ s.

La carica a regime sul condensatore C2 ? La carica totale sulle armature al nodo B,
$Q_B = Q_{1_B} + Q_{2_B} = C_{eq}\epsilon = 10 \times 10^{-6}$ F $\times 5$ V $= 50\ \mu$C
$Q_{2_B} = C_2\epsilon = 4 \times 10^{-6}$ F $\times 5$ V $= 20\ \mu$C.

Nella seconda parte dell'esercizio, il condensatore C2 e' sostituito da un condensatore di capacita' Cx incognita. La capacita' eq. $C_{eq} = C_1 + C_x$ e il tempo caratteristico del circuito e' $\tau = C_1 + C_x$. Quando il condensatore Cx e' riempito di dielettrico con costante dielettrica ϵ_r la capacita' diventa $C_x' = \epsilon_r C_x$, quindi la capacita' equivalente e' $C_{eq}' = C_1 + \epsilon_r C_x$ e il tempo

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} \quad +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} \quad +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\mathbf{r}} \quad +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad +$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{r}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = \; dydz\hat{\mathbf{x}}+$ $dxdz\hat{\mathbf{y}}+$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \; \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}}+$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}}+$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \; r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}+$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}+$ $r dr d\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

caratteristico e' $RC'_{eq} = R(C_1 + \epsilon_r C_x) \ = R(C_1 + 4C_x) = 2R(C_1 + C_x)$. Quindi
$C_x = C_1/2 = 3\ \mu\text{F}$.

Quesito 3 (fino a 10)

Si consideri un filo rettilineo di lunghezza *L* percorso dalla corrente i_0 e una barretta conduttrice di lunghezza *d (d<<L)* parallela al filo che si avvicina al filo con velocità $\vec{v}$ costate e perpendicolare al filo. Calcolare a quale distanza dal filo si genera una d.d.p. ai capi della barretta pari a ε.
Siano: $i_0 = 300\ \text{A},\ d = 50\ \text{cm},\ |\vec{v}| = 10\ \text{m/s},\ \epsilon = 15\ \text{V}$.

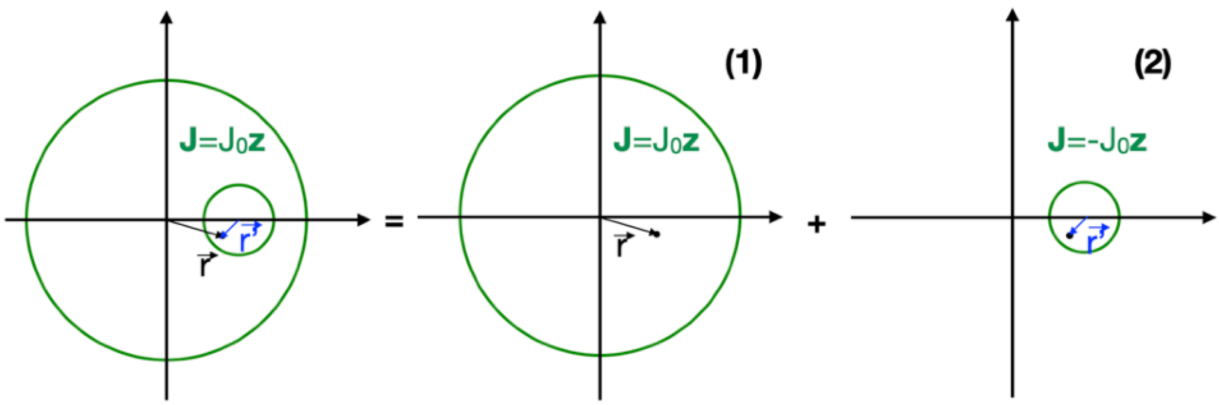
Nelle approssimazioni date il filo puo' essere trattato come un filo infinito che produce il campo magnetico di Biot-Savard, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$. Quando la barretta metallica di muove verso il filo i portatori di carica liberi ciascuno con carica q sono soggetti alla forza di Lorentz $q(-v\hat{r}) \wedge B(r)\hat{\phi} = -qvB(r)\hat{z}$. Quando le cariche soggette a questa forza si spostano (cariche positive verso z <0, cariche negative verso z>0) si determina un campo elettrico che bilancia la forza di Lorentz $qE = qvB(r)$, ma il campo elettrico e' pari alla differenza di potenziale ε tra le due basi della barretta divisa per la lunghezza della barretta, quindi $\frac{\epsilon}{d} = v\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$.

Quindi $r = \frac{v\mu_0 i d}{2\pi\epsilon} = 10\ \text{m/s} \times\ 4\pi \times\ 10^{-7} \times\ 300\text{A} \times\ 0.5\ \text{m}/(2\pi \times 15\ \text{V}) =$
$3 \times 10^{-4}/15 = 0.2 \times 10^{-4}\ \text{m}$.

Quesito 4 (fino a 12 punti)

Si calcoli il campo magnetico all'interno di una cavità cilindrica infinitamente lunga, di raggio r_0 presente in una distribuzione cilindrica infinita di corrente caratterizzata dalla densità uniforme $\overrightarrow{J} = J_0\hat{z}$ (dove $\hat{z}$ indica la direzione dell'asse della distribuzione) e dal raggio R_0 se la distanza tra l'asse della distribuzione di corrente e l'asse della cavita' distano $a = R_0/2$ e se $r_0 = R_0/4$. Siano $J_0 = 1\ \mathrm{A/m^2}$, $R = 0.2\ \mathrm{m}$. A quale forza e' soggetta una carica puntiforme $q_0 = e$ che si trova sull'asse della distribuzione di corrente con velocità $\overrightarrow{v} = 0.1c\ \hat{z}$.

Il sistema di sorgenti puo' essere visto come la sovrapposizione di due sistemi a simmetria cilindrica, il campo magnetico sara' la somma dei campi prodotti dalle due distribuzioni. Lel due distribuzioni sono: un cilindro infinito di raggio R uniformemente pieno di densita' di corrente $\overrightarrow{J} = J_0\hat{z}$ e un cilindro infinito di raggio r0 uniformemente pieno di $\overrightarrow{J} = -J_0\hat{z}$ con asse collocato a distanza a dall'asse dell'altro cilindro che facciamo coincidere con l'asse z. Una vista dall'alto (piano xy) della schematizzazione che e' utile usare e' illustrata in figura.



Il campo in ogni punto dello spazio e' la sovrapposizione dei campi prodotti dalla sorgente descritta in (1) e dalla sorgente in (2). Per calcolare il campo in entrambe le situazioni dobbiamo valutare il campo all'interno di una distribuzione di corrente. Applicando la legge di Ampere a un percorso circolare nel piano xy con raggio r = distanza del punto in cui calcolare il campo dall'asse della distribuzione cilindrica di corrente, si ha $\oint_\gamma B(r)\hat{\phi}\cdot d\vec{l} = 2\pi r\ B(r) =$

$\mu_0 i_c = \mu_0 \int_{\Sigma_\gamma} \overrightarrow{J}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{\Sigma_\gamma} \overrightarrow{J}\cdot ds\hat{z}$. Allora si ha $i_c = \begin{cases} J_0\ \pi r^2 & (1) \\ -J_0\ \pi r'^2 & (2) \end{cases}$

Quindi i campi sono $\begin{cases} \overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} J_0\ r\hat{\phi} & (1) \\ \overrightarrow{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2} J_0\ r'\hat{\phi}' & (2) \end{cases}$

Si noti che $\hat{\phi}'$ e' un versore tangente a circonferenze che si avvolgono in verso antiorario attorno all'asse della cavita', cosi' come $\hat{r}'$ e' il versore radiale uscente del piano xy rispetto all'asse della cavita'. Sostituendo $\hat{z}\wedge\hat{r} = \hat{\phi}$ e analogamente $\hat{z}\wedge\hat{r}' = \hat{\phi}'$ si ha che il campo fisico totale in un punto generico della cavita' e'

$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{2} J_0\ r\ \hat{z} \wedge \hat{r} - \frac{\mu_0}{2} J_0\ r'\ \hat{z} \wedge \hat{r}'\right) = \left(\frac{\mu_0}{2} J_0 \hat{z} \wedge \vec{r} - \frac{\mu_0}{2} J_0 \hat{z} \wedge \vec{r'}\right) = = \frac{\mu_0}{2} J_0 \hat{z} \wedge \left(\vec{r} - \vec{r'}\right)$
$= \frac{\mu_0}{2} J_0 \hat{z} \wedge \vec{a}$ dove $\vec{a} = a\,\hat{x}$ nella figura (ossia con la scelta in figura di avere l'asse x che passa per i due assi della distribuzione e della cavita').

In definitiva $\vec{B}_{cavita} = \frac{\mu_0 J_0 a}{2}\hat{y}$ cioe' ha modulo costante pari a

$$|\vec{B}| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1(\mathrm{A/m^2}) \times 0.2}{4} = 2\pi \times 10^{-8}\ \mathrm{T},$$

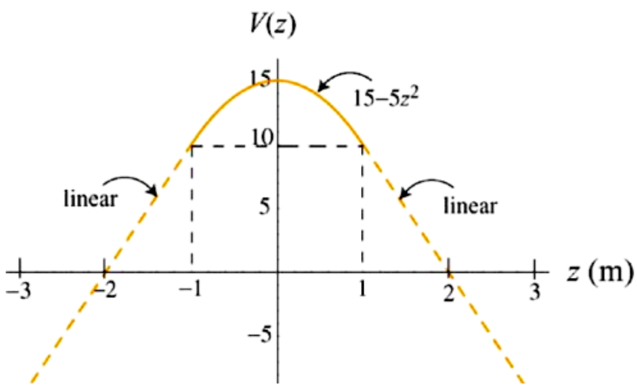
e' contenuto nel piano xy ed e' perpendicolare alla congiungente i due assi del cilindro di raggio R_0 e della cavita' di raggio r_0.

Una carica puntiforme $q_0 = e$ che si trova sull'asse della distribuzione di corrente con velocità $\vec{v} = 0.1c\ \hat{z}$ e' soggetta alla forza di Lorentz $\vec{F} = e \times 0.1c\ \hat{z} \wedge \vec{B}(r=0)$.
$\vec{B}(r=0) = \vec{B}_1(r=0) + \vec{B}_2(r' = R_0/2)$.

$\vec{B}_1(r=0) = 0$ mentre $\vec{B}_2(r' = R_0/2) = -\frac{\mu_0 J_0 \pi r_0^2}{2\pi R_0/2}\hat{\phi}'$ dove $-J_0\pi r_0^2 = -J_0\pi R_0^2/16 = i_{2_{tot}}$ e $\hat{\phi}'(0,0) = -\hat{y}$, quindi $\vec{B}(r=0) = \frac{\mu_0 J_0 R_0}{16}\hat{y}$

$$\vec{F} = e \times 0.1c\ \hat{z} \wedge \frac{\mu_0 J_0 R_0}{16}\hat{y} = -1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^{7} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1(\mathrm{A/m^2}) \times 0.2/16\ \hat{x}$$
$= -0.75 \times 10^{-19}$ N $\hat{x}$.

Quesito 5 (fino a 10 punti)
La figura rappresenta il grafico di funzione per un potenziale elettrostatico che non dipende da x e da y.
Si determini il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in ogni punto dello spazio. Si stabilisca qual e' la distribuzione di carica che produce questo potenziale, ossia quanto vale la densità volumetrica di carica ρ (espressa in C/m^3) in ogni punto dello spazio.



Il potenziale elettrostatico soddisfa l'eq di Poisson $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ ed e' legato al campo elettrico dalla relazione

$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{d}{dz}\phi(z)\hat{z} =$
$\vec{E} = -10\ \mathrm{V/m}\ \hat{z}$, per $z < -1$ m
$\vec{E} = 10\ \mathrm{V/m}\ \hat{z}$, per $z > 1$ m
$\vec{E} = 10z\ \mathrm{V/m}\ \hat{z}$, per -1 m $< z < 1$ m.

La densita' volumetrica di carica che produce questo potenziale elettrostatico e'

$\rho = -\epsilon_0\nabla^2\phi = -\epsilon_0\frac{d^2}{dz^2}\phi(z)$ quindi

$\rho = 0$ per $z < -1$ m e $z > 1$ m
$\rho = 88.5 \times 10^{-12}\ \mathrm{C/m^3}$ per -1 m $< z < 1$ m.

Quindi la distribuzione di carica e' uno strato infinito in x e y di spessore 2 m, con il centro collocato sul piano z=0 e densita' di carica uniforme pari a $\rho = 88.5 \times 10^{-12}\ \mathrm{C/m^3}$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) Formule di Laplace: enunciato ed esempio di applicazione (senza calcolo) a partire da un disegno al caso di distribuzioni filiformi di corrente;
2) Il fenomeno dello schermo elettrostatico: si discutano gli effetti e si dimostri il fenomeno.
3) Si calcoli la capacita' di un condensatore cilindrico in funzione dei parametri geometrici che lo caratterizzano.
4) Si discuta il moto di una particella puntiforme di massa *m* carica positivamente, sia q_0 la carica elettrica, in una regione dello spazio in cui sia presente un campo magnetico uniforme e diretto nella direzione $\hat{x}$. Si consideri che la particella sia nell'origine del sistema di coordinate a t=0 con velocità $\vec{v} = v_0\hat{z}$.

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $\quad d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\ dV$