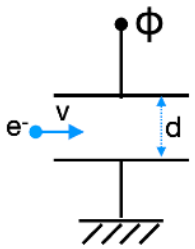
Scritto 68 - Io esonero - a.a. 2024-2025

Quesito 1: (fino a 10)

Nella figura a destra, il condensatore ad armature quadrate e parallele di area $A = 0.1\ \mathrm{m}^2$ a distanza $d = 2\ \mathrm{cm}$ ha una delle armature collegata a massa e l'altra mantenuta al potenziale $\phi = 1\ \mathrm{V}$. Si calcoli la carica sulle armature, l'energia elettrostatica e il campo elettrico all'interno del condensatore. Si dimostri che integrando la densità di energia associata al campo elettrico sul volume del condensatore si ottiene l'energia elettrostatica. Infine, considerato un elettrone che entra nel condensatore con velocità orizzontale di v=3x10⁶ m/s, inizialmente alla stessa distanza dalle due armature, stabilire qual e' lo spostamento direzione verticale e l'angolo θ di deflessione all'uscita dal condensatore.



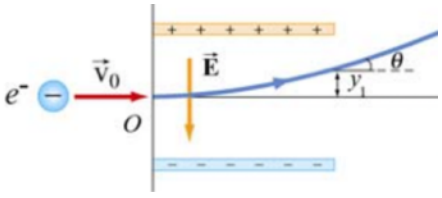
C = Q/DeltaV, quindi calcolando la capacita' di puo' ottenere la carica nota la differenza di potenziale. Per un condensatore ad armature piane e parallele la capacita' e' pari $C = (\mathrm{def}) = \dfrac{\Delta Q_{1\to 2}}{\varphi_1 - \varphi_2} = \dfrac{A\sigma}{\sigma d/\epsilon_0}$ dato che la carica uguale e opposta sulle due armature (di area A) corrisponde a distribuzione superficiale di carica di valore opposto (σ e -σ). Quindi il campo all'interno vale $\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$ (scelgo l'asse z perpendicolare alle armature e rivolto verso l'alto).

Quindi la differenza di potenziale e' $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(d) - \varphi(0) = -\int_{z=0}^{z=d} \vec{E}\cdot dz\hat{z}$ = $\int_{z=0}^{z=d} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}\cdot dz\hat{z} = \sigma d/\epsilon_0$. Quindi la carica Q = 1V x $0.1 \times 8.85 \times 10^{-12}/0.02$ = 44 pC.

La densita' di energia elettrostatica e' pari a $\dfrac{dU_e}{dV} = \dfrac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$. Integrandola sul volume tra le due armature (unica regione in cui c'e' un campo elettrico diverso da zero) si ha

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 \times Ad = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}Ad.$$

D'altra parte l'energia elettrostatica immagazzinata in un condensatore e' data da $U_e = \dfrac{1}{2}Q\Delta V = \dfrac{1}{2}\sigma A \times \dfrac{\sigma d}{\epsilon_0}$ che coincide con l'espressione ottenuta precedentemente.



Un elettrone sara' soggetto alla forza $\vec{F} = q_{e^-}\vec{E} = -e(-\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}) = \dfrac{e\sigma}{\epsilon_0}\hat{z}$ uniforme che determinerà un moto uniformemente accelerato in direzione verticale $z(t) = z_0 + v_{z_0}t + \dfrac{1}{2}\dfrac{e\sigma}{\epsilon_0 m_e}t^2$.

E' noto che $v_{z_0} = 0,\ \ z_0 = d/2$. Inoltre il moto in direzione orizzontale non e' alterato da alcuna forza => $x(t) = x_0 + v_{x_0}t$. Allora l'elettrone uscirà dal volume del condensatore quando $x(\tilde{t}) = x_0 + v_{x_0}\tilde{t} = \sqrt{A} = v\tilde{t}$.

In definitiva,

$$\Delta z = z(\tilde{t}) - z_0 = \frac{e\sigma}{2\epsilon_0 m_e}\frac{A}{v^2} = \frac{2\pi k e Q}{v^2 m_e} = \frac{2\pi\ 9\times 10^9 \times 1.6\times 10^{-19}}{3^2\times 10^{12}\times 9\times 10^{-31}}0.45\times 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

$$\simeq 50\times 10^{-22}/10^{-15} = 500\ \mu\mathrm{m}.$$

La componente y della velocita' all'uscita dal condensatore e'

$$v(\tilde{t}) = \frac{e\sigma}{\epsilon_0 m_e}\tilde{t} = \frac{4\pi k e\sigma}{m_e}\frac{\sqrt{A}}{v} = \frac{4\pi k e Q}{m_e v\sqrt{A}} = \frac{4\pi\ 9\times10^9\times1.6\times10^{-19}}{3\times10^6\times9\times10^{-31}\times\sqrt{0.1}}\times0.45\times10^{-12} =$$

$2\Delta z(\tilde{t})v/\sqrt{A} = 500\ \mu\text{m}\times3\times10^6\ (\text{m/s})/0.316\ \text{m} = 5000$ m/s.

L'angolo θ che la traiettoria dell'elettrone forma con l'asse orizzontale all'uscita dal condensatore e'

$$\tan\theta = v_y/v_x = \frac{5\times10^3}{0.3\times10^8} = 1.67\times10^{-4} \simeq \theta.$$

Quesito 2: (fino a 10)

Si calcoli in tutti i punti dello spazio il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotti da un cilindro di lunghezza molto maggiore del raggio a uniformemente carico con densità volumetrica ρ collocata al centro di un conduttore cilindrico cavo neutro con raggio della cavità pari a 2a e raggio esterno pari a 3a. Si fissi il valore del potenziale a zero sul conduttore. Si calcoli la densità superficiale di carica sulle superfici interne ed esterne del conduttore.

Il sistema ha simmetria cilindrica, pertanto $\varphi(r,\phi.z) = \varphi(r)$, con r = distanza dall'asse di simmetrica cilindrica, e $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. La presenza del cilindro carico di raggio R_0 all'interno della cavita' cilindrica del conduttore induce carica elettrica sulla superficie interna del conduttore, con densita' superficiale tale che su un tratto di lunghezza h del sistema si ha $2\pi R_i h\sigma_i = -\rho\pi R_0^2 h$ (la carica sul cilindro interno e sulla superficie interna del conduttore uguale e opposta, come si deduce calcolando il flusso del campo attraverso qualunque superficie cilindrica coassiale al sistema con raggio 2a<r<3a). Quindi $\sigma_i = -\frac{\rho R_0^2}{2R_i}$. Inoltre, dal momento che il conduttore e' neutro sulla superficie esterna ci sara' una carica distribuita uniformemente con densita' tale da compensare la carica indotta sulla superficie interna: $2\pi R_i h\sigma_i = -2\pi R_e h\sigma_e$, cioè $\sigma_e = -\frac{R_i}{R_e}\sigma_i = \frac{\rho R_0^2}{2R_e}$.

Il campo elettrico e' calcolabile con l'applicazione della legge di Gauss a superfici cilindriche chiuse C di raggio r e altezza arbitraria h.

$\Phi_C(\vec{E}) = 2\pi rhE(r)$ perche' solo la superficie laterale contribuisce al flusso (sulle basso il campo elettrico e' ortogonale agli elementi di superficie, mentre sulla sup. laterale e' parallelo).

La carica Q all'interno di C e' $Q_{int}(C) = \int_{V_C}\rho(r)dV = \begin{cases} r<R_0 & \pi r^2 h\rho \\ R_0<r<R_i & \pi R_0^2 h\rho \\ R_i<r<R_e & 0 \\ R_e<r & \pi R_0^2 h\rho \end{cases}$

Il campo elettrico pertanto e' $\vec{E} = \begin{cases} r<R_0 & \frac{r\rho}{2\epsilon_0}\hat{r} \\ R_0<r<R_i & \frac{R_0^2\rho}{2r\epsilon_0}\hat{r} \\ R_i<r<R_e & 0 \\ R_e<r & \frac{R_0^2\rho}{2r\epsilon_0}\hat{r} \end{cases}$

Il potenziale elettrostatico all'esterno di tutto il sistema e' $\varphi(r)-\varphi(R_e)=-\int_{R_e}^{r}\frac{\rho R_0^2\hat{r}}{2r\epsilon_0}\cdot dr\hat{r}=$

$=-\frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R_e}\right)$. Fissato nullo il potenziale a r=Re, si ha $\varphi(r)=-\frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R_e}\right)$ che al limite per r-> Re vale 0.

Il potenziale e'costante nel conduttore e quindi pari a zero. Per R0<r<Ri si ha $\varphi(r)=\varphi(r)-\varphi(R_i)=\int_r^{R_i}\frac{\rho R_0^2\hat{r}}{2\epsilon_0 r}\cdot dr\hat{r}=\frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{R_i}{r}\right)$. Infine all'interno del cilindro carico centrale si ha

$\varphi(r)-\varphi(R_0)=\int_r^{R_0}\frac{\rho r\hat{r}}{2\epsilon_0}\cdot dr\hat{r}\Rightarrow\varphi(r)=\frac{\rho R_0^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)+\frac{\rho}{4\epsilon_0}\left(R_0^2-r^2\right)$.

In definitiva:

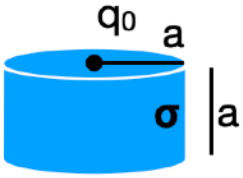
Densita' di carica indotta: $\sigma_i=-\frac{\rho R_0^2}{2R_i}=-\frac{\rho a}{4}$ $\sigma_e=\frac{\rho R_0^2}{2R_e}=\frac{\rho a}{6}$

Campo e potenziale:

$$\vec{E}(r)=\begin{cases} r<a & \frac{r\rho}{2\epsilon_0}\hat{r}\\ a<r<2a & \frac{R_0^2\rho}{2r\epsilon_0}\hat{r}\\ 2a<r<3a & 0\\ r>3a & \frac{R_0^2\rho}{2r\epsilon_0}\hat{r}\end{cases}\qquad \varphi(r)=\begin{cases} r<a & \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln 2+\frac{\rho}{4\epsilon_0}\left(a^2-r^2\right)\\ a<r<2a & \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{2a}{r}\right)\\ 2a<r<3a & 0\\ r>3a & -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{3a}\right)\end{cases}$$

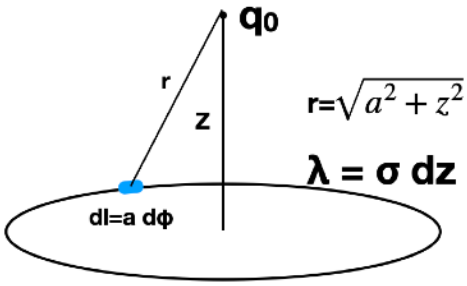
Quesito 3: (fino a 10)

Si consideri una carica Q distribuita uniformemente sulla superficie laterale di un cilindretto di raggio a e altezza h=a. Si calcoli l'energia potenziale di una carica puntiforme q_0, dello stesso segno di Q, collocata al centro di una base del cilindretto. *Suggerimento: si consideri la superficie cilindrica come sovrapposizione di anelli carichi.*



La superficie cilindrica puo' essere interpretata come la sovrapposizione di anelli uniformemente carichi con densita' lineare $\lambda=\sigma\ dz$ in modo tale che

$\Sigma\ \lambda\ 2\pi a=\int\sigma dz\ 2\pi a=\sigma a\ 2\pi a=Q2\pi a^2.$



Rispetto ad ogni anello la carica q0 si trova su un punto dell'asse a distanza da piano dell'anello variabile da 0 ad a'. Quindi si puo' calcolare l'energia potenziale della carica come

$E_p=q_0\varphi=\int_{z=0}^{z=a}q_0\ d\varphi(z)$ dove $d\varphi(z)$ e' il contributo infinitesimo al potenziale dovuto all'anello per il quale la carica si trova alla distanza z dal suo centro.

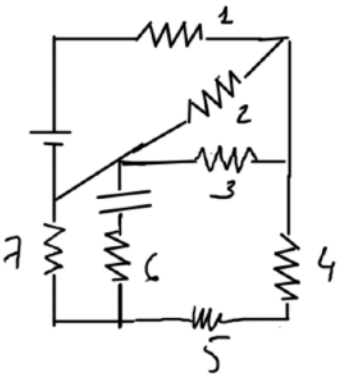
Il potenziale che un anello γ uniformemente carico (con densita' λ) produce nel punto P a distanza z sull'asse e' dati da $\varphi(z)=\int_\gamma\frac{k\lambda\ dl}{r}=\int_0^{2\pi}\frac{k\lambda\ ad\phi}{\sqrt{a^2+z^2}}=\frac{k2\pi a\sigma\ dz}{\sqrt{a^2+z^2}}$

Quindi

$$\varphi(\vec{r}_{q0}) = \int_0^a dz \frac{k\,2\pi a\sigma}{\sqrt{a^2+z^2}} = k\,2\pi a\sigma \int_0^a dz \frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} = k\,2\pi a\sigma \ln|z+\sqrt{a^2+z^2}|\Big|_0^a =$$

$$k\,2\pi a\sigma \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+a^2}}{a}\right| = k\,2\pi a\sigma \ln(1+\sqrt{2}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln(1+\sqrt{2})$$

L'energia potenziale della particella e' $E_p = q_0\varphi = q_0\, k\,2\pi a\sigma \ln(1+\sqrt{2}) = \frac{q_0 Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln(1+\sqrt{2}).$



Quesito 4: (fino a 10) Il circuito in figura si trova in condizioni di funzionamento di regime; si calcoli la potenza erogata dal generatore e la carica sulle armature del condensatore. Si assuma R1=R3=R5=1kΩ, R2=R4=2kΩ, R6=R7=3kΩ, ε=20 V, C=10nF.

A regime non circola corrente nel ramo del condensatore che sara' completamente carico (si veda lo schema 1). La Potenza erogata dal generatore e' $P_{erogata} = \epsilon i_g$, occorre quindi calcolare la corrente che scorre nel ramo del generatore. La carica sulle armature del condensatore e' $Q_C = C(\varphi_A - \varphi_B)$ (si veda schema 2).
I due nodi sono indicati in giallo nello schema 2.

La differenza di potenziale tra i due nodi e' uguale e $\epsilon - i_g R_1$ ma anche a $i_4(R_4+R_5+R_7)$.

Inoltre $\varphi_A - \varphi_B = -i_4 R_7 = \frac{i_g R_1 - \epsilon}{R_4+R_5+R_7} R_7$

da cui si dedicano le relazioni

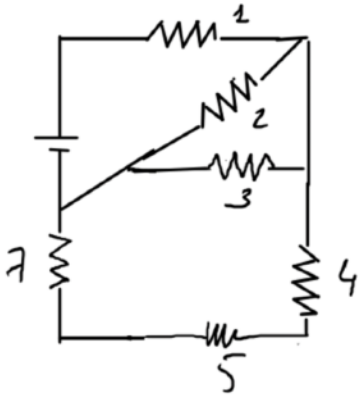
$$Q_C = -Ci_4R_7 = \frac{i_gR_1-\epsilon}{R_4+R_5+R_7}CR_7.$$

La resistenza eq del circuito si ricava con queste considerazioni:
R_4, R_5, R_7 sono in serie. Inoltre R_2, R_3 sono in parallelo e ancora in parallelo con la serie $R_{457} = R_4+R_5+R_7 = 6\ \text{k}\Omega$. Quindi $R_{2,..,7} = \frac{R_{457}R_2R_3}{(R_2+R_3)(R_{457}+(R_2R_3)/(R_2+R_3))} =$

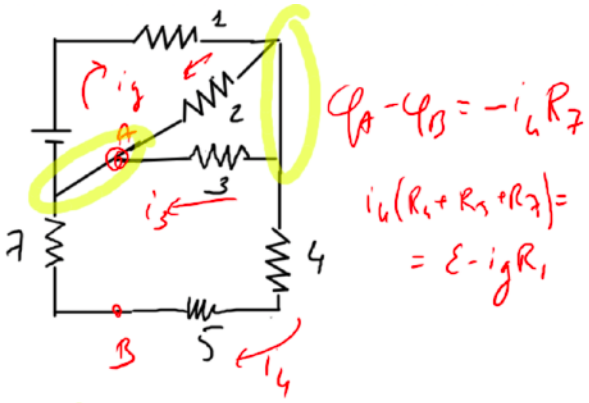
$$R_{2,..,7} = \frac{R_{457}R_2R_3}{(R_2+R_3)R_{457}+R_2R_3} = 0.6\ \text{k}\Omega.$$

Infine,
$R_{eq} = R_1 + R_{2,..,7} = 1.6\ \text{k}\Omega$. Quindi $i_g = \epsilon/R_{eq} = 20/1600\ \text{A} = 12.5\ \text{mA}$.
$P_{erogata} = \epsilon i_g = 0.25\ \text{W}$.

$$Q_C = \frac{i_gR_1-\epsilon}{R_4+R_5+R_7}CR_7 = \frac{0.0125\times 1000 - 20}{6000}10^{-8}\times 3000\ \text{C} = 37.5\ \text{nC}.$$



1. CIRCUITO A REGIME



2 CORRENTI E NODI A REGIME

Quesito 5: (fino a 8)
Si discuta un argomento a scelta tra i seguenti:

- Derivazione delle equazioni di Poisson e Laplace; proprietà delle funzioni armoniche.
- Si dimostri che l'energia immagazzinata in un condensatore le cui armature sono collegate da un resistore è interamente dissipata nel resistore.
- Si dimostri che in un circuito di carica di un condensatore (condensatore, resistore e generatore collegato in serie) l'energia erogata dal generatore è per metà dissipata nel resistore e per metà accumulata nel condensatore.