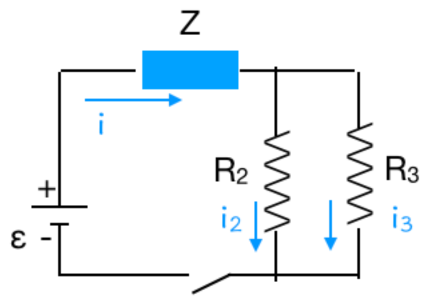
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 74 - a.a. 2024-2025



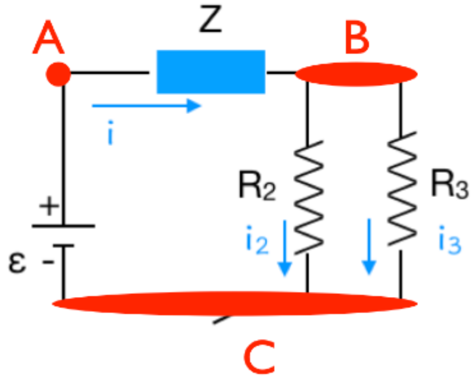
Quesito 1: (fino a 12+6) Nel circuito in figura l'interruttore e' chiuso all'istante di tempo t0=0.
Si calcoli

1) la corrente che scorre in R2 immediatamente dopo la chiusura del circuito; **Nel caso A** $i_2(0) = 50\ \mathrm{mA}$, **nel caso B** $i_2(0) = 0\ \mathrm{A}$
2) la corrente che scorre in R3 asintoticamente; **Nel caso A** $i_2(t \to \infty) = 0\ \mathrm{A}$, **nel caso B** $i_3(t \to \infty) = 33.3\ \mathrm{mA}$
3) il tempo t1 in cui la corrente in R3 e' pari a metà del valore asintotico;
4) l'andamento nel tempo della corrente i3

Si utilizzino i valori *R_2 =200 Ω, R_3 = 300 Ω, ε = 10 V e si scelga tra il vaso A e il caso B.*

A) Z sia un condensatore di capacita' C= 1 nF

B) Z sia una induttanza di valore L= 10 mH



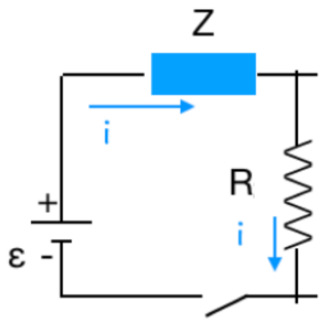
Ricordiamo che condensatori e induttanze determinano un comportamento transiente delle correnti in un circuito. A regime (ossia quando l'interruttore del circuito e' chiuso da molto tempo la corrente in un ramo in cui sia presente un condensatore e' nulla, mentre la corrente in un ramo in cui sia presente un induttore e' pari a quella che si avrebbe se l'induttore fosse sostituito da un corto circuito).

Nel circuito ci sono 2 nodi B e C; le due resistenze R2 e R3 sono in parallelo (connettono entrambe i nodi B e C). Pertanto la corrente i che scorre nel ramo del generatore puo' essere descritta dalla eq. :

$\epsilon = V_A - V_B + V_B - V_C = V_A - V_B + iR_{2//3}$

La resistenza equivalente e' data da

$$R = R_{2//3} = (1/R_2 + 1/R_3)^{-1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 120\ \Omega.$$



Le correnti i2 e i3 saranno legate alla corrente totale dalle due relazioni:

$i = i_2 + i_3$ e $i_2 R_2 = i_3 R_3$.

Quindi $i = i_2 + i_2 R_2/R_3 \quad \to \quad i_2 = i\dfrac{R_3}{R_2 + R_3} = \dfrac{3}{5}i$

Analogamente $i_3 = i\dfrac{R_2}{R_2 + R_3} = \dfrac{2}{5}i.$

Tutte le correnti varieranno nel tempo perche' sia quando Z e' un condensatore che quando Z e' un'induttanza le correnti hanno un comportamento transiente.

Nel **caso A)** la differenza di potenziale $V_A - V_B = Q_A/C$ dove Q_A e' la carica sull'armatura del condensatore che si trova al potenziala V_A. Ovviamente sull'altra armatura ci sara' la carica $Q_B = -Q_A$. D'altra parte la carica Q_A si accumula per effetto della corrente i che scorre dal polo positivo del generatore verso l'armatura A accumulando cariche posticce sull'armatura. In termini matematici questo significa che $Q_A = \displaystyle\int_0^t i(t')dt'$.

Appena il circuito e' chiuso il condensatore e' scarico ($Q_A = 0$ e $V_A - V_B = 0$) quindi dall'eq. $\epsilon = V_A - V_B + iR_{2//3}$ si ha $i(0) = \epsilon/R = 10\ \mathrm{V}/120\ \Omega$ = 83.3 mA.
Pertato $i_2(t=0) = (3/5) \times 83.3\ \mathrm{mA} = 50\ \mathrm{mA}$ e la corrente $i_3(t=0) = (2/5) \times 83.3\ \mathrm{mA} = 33.3\ \mathrm{mA}$. La corrente i avra' un andamento nel tempo esponenziale decrescente con costante di decadimento $\tau = RC = 120 \times 10^{-9}\ \mathrm{s} = 0.12\ \mu\mathrm{s}$, cioè $i(t) = i(t=0)e^{-t/\tau}$. Analogamente $i_2(t) = \frac{3}{5} i(t=0)e^{-t/\tau}$ e $i_3(t) = \frac{2}{5} i(t=0)e^{-t/\tau}$.

Quindi i_3 asintoticamente e' zero. Non ha molto senso chiedersi qual e' il tempo t_1 in cui i_3 e' pari a meta' del valore asintotico. Date le proprietà della funzione esponenziale possiamo pero' dire che dopo circa 5τ il valore asintotico e' raggiunto.

Nel **caso B)** la differenza di potenziale $V_B - V_A = -L\frac{di}{dt}$, cioè l'induttanza si comporta come un generatore di forza elettromotrice indotta pari a $\epsilon_i = -\frac{d\Phi(\overrightarrow{B})}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}$. La corrente iniziale e' nulla, quindi $i_2(t=0) = 0\ \mathrm{A}$, e quando cresce produce il campo magnetico il cui flusso variabile nel tempo determina l'effetto di induzione elettromagnetica. Asintoticamente la corrente si stabilizza al valore che avrebbe in assenza di autoinduzione, cioè per L=0. Quindi la corrente asintotica e' pari a 83mA, $i_3(t \to \infty) = 33.3\ \mathrm{mA}$,

L'eq. del circuito e' $\epsilon - L\frac{di}{dt} = Ri$.

$-i + \frac{\epsilon}{R} = \frac{L}{R}\frac{di}{dt}$. Divido per $i - (\epsilon/R)$ e ottengo $\frac{di}{i - \epsilon/R} = -\frac{R}{L}dt$ in cui a sinistra ho solo la variabile i e a destra solo la variabile t. Quindi integro da 0 a t, a destra, e da i(0) a i(t) a sinistra ottenendo (visto che i(0)=0)

$\ln\frac{i(t) - \epsilon/R}{i(0) - \epsilon/R} = -\frac{R}{L}t$. Quindi $i(t) - \epsilon/R = -(\epsilon/R)e^{-\frac{R}{L}t}$ ossia $i(t) = \frac{\epsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

$i_3(t) = \frac{3}{5} \times 83.3\ \mathrm{mA}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = 33.3\ \mathrm{mA}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

La costatante di tempo questa volta e' $\tau = L/R = 0.01\ \mathrm{H}/120\ \Omega = 83.3\ \mu\mathrm{s}$.

La corrente i3 sara' pari a meta' del valore asintotico at tempo $\bar{t}$ tale che

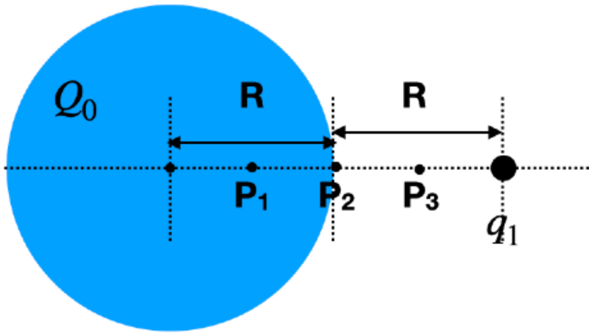
$0.5\frac{\epsilon}{R} = \frac{\epsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\bar{t}}\right)$

$0.5 = 1 - e^{-\frac{R}{L}\bar{t}}$ e quindi $0.5 = e^{-\frac{R}{L}\bar{t}}$

$-\frac{L}{R}\ln 0.5 = \bar{t}$ = 57.7 μs.

Quesito 2 (fino a 12 punti)
Si consideri un sistema composto da una sfera uniformemente carica di raggio R=10 cm e carica complessiva Q_0=1 nC ed una carica puntiforme q_1 =0.1 nC collocata a distanza 2R dal centro della distribuzione di carica sferica.

1) Calcolare l'energia elettrostatica del sistema complessivo:
2) Si calcoli il campo elettrico e il potenziale elettrostatico nei punti P_1, P_2 e P_3 indicati in figura.



Il sistema complessivo consiste di due sistemi a simmetria sferica: la carica puntiforme q_1e la sfera uniformemente carica con carica Q_0. Il campo elettrico e il potenziale elettrostatico in tutti i punti dello spazio possono essere calcolati come somma dei campi E prodotti dai due sistemi considerati singolarmente $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_0}$.

La carica puntiforme produce il campo coulombiano $\overrightarrow{E_1}(P) = k\dfrac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1$ dove $\hat{r}_1$ e' il versore radiale uscente dalla posizione di q_1 e con r_1 si indica la distanza del punto P da q_1.

La sfera uniformemente carica produce nei punti esterni (cioe' a distanza r>R dal centro della sfera) un campo elettrico che ha la stessa forma del campo Coulombiano:

$\overrightarrow{E_0}(r > R) = k\dfrac{Q_0}{r^2}\hat{r}$ dove $\hat{r}$ e' il versore radiale uscente dal centro della sfera carica.

Per punti interni alla sfera carica il campo elettrico dovuto a Q_0 puo' essere calcolato facilmente sfruttando la simmetria sferica del problema, dalla quale discende il fatto che $\overrightarrow{E_0} = E_0(r)\hat{r}$.

Quindi considerata una superficie sferica S di raggio r<R si ha che il flusso del campo elettrico attraverso S

$$\Phi_S(\overrightarrow{E_0}) = \int_S \overrightarrow{E_0} \cdot d\vec{s} = \int_S E_0(r)\hat{r} \cdot ds\hat{r} = E_0(r)\int_S ds = E_0(r)4\pi r^2$$

e' uguale alla carica contenuta in S divisa per la costante dielettrica del vuoto, ossia

$$Q_{int}(S) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{4}{3}\pi r^3\frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q_0 r^3}{R^3}$$

Quindi $\overrightarrow{E_0}(r < R) = k\dfrac{Q_0 r}{R^3}\hat{r}$.

Quindi $\overrightarrow{E}(P_3) = \overrightarrow{E_0}(P_3) + \overrightarrow{E_1}(P_3) = \dfrac{kQ_0}{(3R/2)^2}\hat{r} + \dfrac{kq_1}{(R/2)^2}\hat{r}_1 = \dfrac{k}{R^2}\left(\dfrac{Q_0}{(3/2)^2} - \dfrac{q_1}{(1/2)^2}\right)\hat{r} =$

$$= \frac{9\times 10^9}{10^{-2}}\left(\frac{4\times 10^{-9}}{9} - 4\times 0.1\times 10^{-9}\right)\hat{r} = 9\times 10^2\left(\frac{4}{9} - 0.4\right)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\hat{r} = 40 \text{ V/m } \hat{r}$$

$$\overrightarrow{E}(P_2) = \overrightarrow{E_0}(P_2) + \overrightarrow{E_1}(P_2) = \frac{kQ_0}{R^2}\hat{r} + \frac{kq_1}{R^2}\hat{r}_1 = \frac{k}{R^2}\left(Q_0 - q_1\right)\hat{r} = 810 \text{ V/m } \hat{r}$$

$\overrightarrow{E}(P_1) =$

$\overrightarrow{E_0}(P_1) + \overrightarrow{E_1}(P_1) = \dfrac{kQ_0R/2}{R^3}\hat{r} + \dfrac{kq_1}{(3R/2)^2}\hat{r}_1 = \dfrac{k}{R^2}\Big(\dfrac{Q_0}{2} - \dfrac{4q_1}{9}\Big)\hat{r} = \dfrac{9}{10^{-2}}\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{4\times 0.1}{9}\Big)\hat{r}$

= 410 V/m $\hat{r}$

Analogamente il potenziale elettrostatico in ogni punto si calcola come somma del potenziale elettrostatico dovuto alle sue distribuzioni di carica fissato potenziale nullo all'infinito.

$\varphi(P_3) = k\dfrac{q_1}{R/2} + k\dfrac{Q_0}{3R/2}$ = $9\times 10^9 \times 10^{-9}(2/0.1)(0.1 + 1/3)$ = 78 V

$\varphi(P_2) = k\dfrac{q_1}{R} + k\dfrac{Q_0}{R}$ = $9\times 10^9 \times 10^{-9}(1/0.1)(0.1 + 1)$ = 99 V

$\varphi(P_0) = k\dfrac{q_1}{3R/2} + \varphi_0(r=R) + \Big(\varphi_0(r/2) - \varphi_0(r=R)\Big)$ =

$k\dfrac{q_1}{3R/2} + k\dfrac{Q_0}{R} + \Big(\varphi_0(r/2) - \varphi_0(r=R)\Big)$=

$9\times 10^9 \times 10^{-9}(1/0.1)\Big(2/3\times 10^{-1} + 1\Big)$ + $\Big(\varphi_0(r/2) - \varphi_0(r=R)\Big)$ =

96 V + $\Big(\varphi_0(r/2) - \varphi_0(r=R)\Big)$ = 96 V + $\displaystyle\int_{R/2}^{R} \overrightarrow{E_0}\cdot dr\hat{r}$ = 96 V + $\displaystyle\int_{R/2}^{R} \dfrac{kQ_0 r}{R^3}\hat{r}\cdot dr\hat{r} =$

96 V + 9x10³ V $\Big(R^2/2 - (R/2)^2/2\Big)$ = 96 V + 9x10³ $\Big(R^2/2 - (R/2)^2/2\Big)$ =

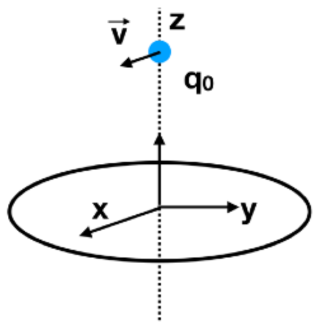
96 V +90 (0.5-0.125) V = 129.75 V.

L'energia elettrostatica del sistema e' l'energia necessaria a costruire l'intero sistema. Calcoliamo prima l'energia elettrostatica della sfera uniformemente carica con la formula $E_{e0} = \displaystyle\int_0^R dq_r\varphi_r$ dove con $dq_r = \dfrac{3Q_0}{4\pi R^3}\ 4\pi r^2 dr$ indichiamo la carica contenuta in uno strato sferico di raggio compreso tra r e r+dr e con $\varphi_r = k\ \dfrac{3Q_0}{4\pi R^3}\ \dfrac{4}{3}\pi r^3\ \dfrac{1}{r}$ = $k\ \dfrac{Q_0 r^3}{R^3}\ \dfrac{1}{r}$ indichiamo il potenziale elettrostatico prodotto al raggio r da una quantità di carica uniformemente distribuita - con la densita' della nostra sfera - in un volume sferico di raggio r. L'integrale rappresenta quindi la somma del lavoro che dobbiamo fare per costruire la sfera aggiungendo via via strati compresi tra r e r+dr per r che va da 0 fino a R.

$E_{e0} = \displaystyle\int_0^R dq_r\varphi_r$ = $\displaystyle\int_0^R \dfrac{3Q_0 r^2}{R^3}\times k\ \dfrac{Q_0 r^3}{R^3}\ \dfrac{1}{r}dr$ = $3k\ \dfrac{Q_0^2}{R^6}\displaystyle\int_0^R r^4 dr = \dfrac{3}{5}k\dfrac{Q_0^2}{R}.$

A questa energia va sommata l'energia necessaria a portare la carica q_1 a distanza 2R dal centro della distribuzione sferica di carica, quindi

$E_e = \dfrac{3}{5}k\dfrac{Q_0^2}{R} + k\dfrac{Q_0 q_1}{2R}$ = $9\times 10^9 \times (10^{-9})^2\Big(\dfrac{3}{5} + \dfrac{0.1}{2}\Big)\times 10$ = 58.5 x 10^{-9} J



Quesito 3 (fino a 12 punti)
Calcolare la forza che una corrente stazionaria I, che scorre nell'anello di raggio a rappresentato in figura, su una particella di carica q_0 e velocità $\vec{v} = v_0\hat{x}$ nell'istante di tempo in cui essa si trova sull'asse z alla quota z_0. Si discutano i due versi di scorrimento della corrente nell'anello conduttore.

L'anello γ percorso da corrente produce un campo magnetico in ogni punto dello spazio perciò la carica sara' soggetta alla forza di Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}(0,0,z_0) = q_0 v\hat{x} \wedge \vec{B}(0,0,z_0) = .$

Il campo magnetico in un punto generico P individualo dal raggio vettore $\vec{r}$ si calcola con la formula di Laplace:

$\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i \oint_\gamma \dfrac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$ dove $\vec{r'}$ e' il raggio vettore del tratto infinitesimo $d\vec{l}$ di conduttore percorso dalla corrente i [si noti che $d\vec{l}$ e' orientato nel verso in cui scorre la corrente].

Immaginiamo che la corrente scorra nel verso antiorario (guardando dall'alto l'anello, ossia con l'asse z che punta verso di noi osservatori). Allora

$$\vec{B}(\vec{r} = (0,0,z_0)) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi} \frac{R d\phi \hat{\phi} \wedge (z_0\hat{z} - R\hat{r})}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} =$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \left(z_0 \int_0^{2\pi} d\phi \hat{\phi} \wedge \hat{z} + R \int_0^{2\pi} d\phi \hat{\phi} \wedge (-\hat{r}) \right) +$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \left(z_0 \int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} + R \int_0^{2\pi} d\phi \hat{z} \right) =$$

Dal momento che $\int_0^{2\pi} d\phi \hat{r} = \vec{0}$ perche' tutti i versori r lungo la circonferenza di annullano nella somma con l'opposto in posizione simmetrica rispetto al centro, si ha

$\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i \dfrac{R^2}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} 2\pi\hat{z} = \dfrac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}}\hat{z}$ Il campo e' diretto verso l'alto se i > 0, cioe' se scorre nel verso che abbiamo fissato.

Se cambia il verso della corrente il campo magnetico cambia verso.

La forza sulla carica e'

$$\vec{F} = q_0 v\hat{x} \wedge \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}}\hat{z} = -\frac{q_0 v \mu_0 i R^2}{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}}\hat{y}$$

Per verso opposto della corrente nell'anello si ha

$$\vec{F} = q_0 v\hat{x} \wedge \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}}(-\hat{z}) = \frac{q_0 v \mu_0 i R^2}{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}}\hat{y}$$

Quesito 4 (fino a 12 punti)
Si calcoli in tutti i punti dello spazio il campo magnetico prodotto da un cilindro infinitamente lungo con raggio di base pari a r_0 percorso da una densità di corrente uniforme $\vec{J} = J_0\hat{z}$ diretta come il suo asse.

Il problema e' un caso classico. Data la simmetria cilindrica e le proprietà generali del campo magnetico si puo' dedurre che $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ dove $\hat{\phi}$ e' un versore tangente a circonferenze nel piano perpendicolare all'asse del cilindro e con centro sull'asse. Si risolve con l'applicazione della legge di Ampere che afferma che per correnti stazionarie $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$ dove i_c e' la corrente concatenata con il circuito, puramente geometrico, C, ossia per definizione, $i_c = \int_{\Sigma_C} \vec{J} \cdot d\vec{s}$ e dal momento che siamo nell'ipotesi di J stazionaria (solenoidale) la scelta della superficie Σ_C e' ininfluente sul risultato, che sara' lo stesso per ogni superficie con bordo pari a C, il circuito lungo il quale si calcola la circuitazione del campo.
Per calcolare il campo magnetico all'interno della distribuzione di corrente si sceglie C pari ad una circonferenza coassiale con il nostro cilindro e raggio r<r0. La corrente concatenata sarà $i_c = J_0\pi r^2$. Per un punto esterno al cilindro invece scegliamo il circuito C in modo tale che r>R e la corrente incatenata sarà quindi $i_c = J_0\pi r_0^2$.
Pertanto il campo magnetico sara'

$$\begin{cases} \vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{\phi} & r < R \\ \vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r_0^2}{2r}\hat{\phi} & r > R \end{cases}$$

Quesito 5 (fino a 8 punti)
Si discuta uno degli argomenti elencati:
1) Si discuta l discontinuità del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato superficiale di carica con densità superficiale σ.
2) Si discuta l'equivalenza tra spire percorse da corrente e dipoli magnetici.
3) Differenze e analogie tra dipoli elettrici e magnetici.

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$
Campo $\vec{E}$ e potenziale φ prodotti da una carica puntiforme: $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$; $\varphi(r) = k\frac{q}{r}$
Campo $\vec{E}$ e potenziale φ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$
Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;
Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\ dV$