

Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 75 - a.a. 2024-2025

Quesito 1: (max 10 punti)

I parametri del circuito in figura sono: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10 \text{ V}$,
 $R_1 = 2R_3 = 2R_2 = 100 \Omega$. Si calcoli la potenza erogata da
ciascun generatore e quella dissipata su ogni resistenza.

Nel circuito ci sono due nodi: uno in cui confluiscono le
correnti i_1 e i_3 (la cui somma è uguale a i_2) e l'altro in cui i_2 si
divide in i_1 e i_3 (la seconda eq. relativa a questo nodo è
esattamente identica alla eq. al primo nodo). Considerando la
maglia costituita dal ramo con ϵ_1 e R_1 e dal ramo con R_2 si ha

$$\epsilon_1 = i_1 R_1 + i_2 R_2. \text{ D'altra parte analogamente si ha } \epsilon_2 = i_3 R_3 + i_2 R_2.$$

Quindi

$$\begin{cases} \epsilon_1 = i_1 (R_1 + R_2) + i_3 R_2 \\ \epsilon_2 = i_1 R_2 + i_3 (R_2 + R_3) \end{cases} \quad (*)$$

$$\epsilon_1 - i_1 R_1 = \epsilon_2 - i_3 R_3 \text{ da qui ricavo } i_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{R_1} + i_3 \frac{R_3}{R_1} \quad (**)$$

e sostituendo, per esempio, nella
seconda eq. in (*) attengo una eq. nella sola incognita i_3 rispetto alla quale posso risolvere
ottenendo:

$$i_3 = \frac{R_1 \epsilon_2 + R_2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 80 \text{ mA.}$$

La corrente

$$i_1 = \frac{R_3 \epsilon_1 + R_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = 40 \text{ mA si ottiene per sostituzione della } i_3 \text{ in } (**)$$

[o anche semplicemente per simmetria del circuito e delle equazioni]. La corrente i_2 pertanto vale
 $i_2 = 120 \text{ mA}$.

La potenza erogata dal generatore 1(2) e' $P_{erog.1} = \epsilon_1 i_1 = 800 \text{ mW}$, $P_{erog.2} = \epsilon_2 i_3 = 400 \text{ mW}$.

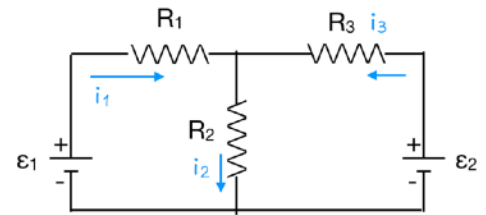
La potenza dissipata su R_1 , 3 e 2 è pari a $P_{Joule_{1,3,2}} = R_{1,3,2} i_{1,3,2}^2$ quindi

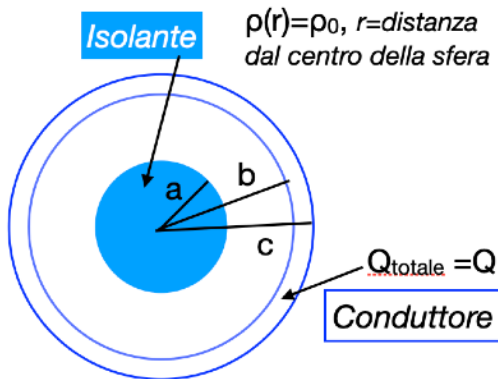
$$P_{J_1} = 100 \Omega i_1^2 = 160 \text{ mW},$$

$$P_{J_3} = 50 \Omega i_3^2 = 320 \text{ mW}$$

$$P_{J_2} = 50 \Omega i_2^2 = 720 \text{ mW}$$

Come atteso, la somma delle potenze erogate è uguale alla somma delle potenze dissipate sui
vari resistori.



Quesito 2 (fino a 12 punti)

centro O.

Si consideri un sistema composto da una sfera uniformemente carica di raggio $a=10$ cm e carica complessiva $Q_0=1$ nC ed un conduttore cavo di raggio interno $b=20$ cm e raggio esterno $c=21$ cm, che circonda la sfera uniformemente carica, su cui è depositata una carica complessiva $Q_c=-0.5$ nC. Il centro O della sfera carica e del guscio conduttore coincidono.

Calcolare:

- 1) il campo elettrico in tutti i punti dello spazio;
- 2) il potenziale elettrostatico a cui si trova il conduttore, nell'ipotesi di fissare a zero il potenziale a distanza infinita dal sistema
- 3) Il lavoro che bisogna compiere contro il campo elettrico per portare una carica puntiforme $q_1 = -10^{-12}$ C dalla distanza c alla distanza $3c$ dal

Il sistema manifesta una simmetria sferica per cui usiamo coordinate sferiche con origine del sistema di riferimento nel centro di simmetria, cioè al centro della sfera carica. La carica Q_0 sulla sfera di raggio a produce un effetto di induzione elettrostatica sul guscio sferico conduttore per cui sulla superficie interna del conduttore ci sarà una carica complessiva indotta pari a $-Q_0$ (che sarà distribuita uniformemente sulla superficie della cavità) e pertanto sulla superficie esterna del guscio conduttore ci sarà complessivamente la carica $Q_{ext} = Q_0 + Q_c = 0.5$ nC (visto che la carica totale sul conduttore deve essere Q_c). Per $b < r < c$ il campo elettrico sarà nullo (perché siamo all'interno di un conduttore all'equilibrio elettrostatico). Per $r > c$ il campo sarà Coulombiano, a causa della simmetria sferica delle sorgenti che - all'esterno - producono un effetto pari a quello che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata in un unico punto, il centro di simmetria. Pertanto il campo è uguale a $\vec{E}(r > c) = k \frac{Q_c + Q_0}{r^2} \hat{r}$. Analogamente per

$a < r < b$, si ha $\vec{E}(a < r < b) = k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r}$. Infine per $r < a$, applicando la legge di Gauss a una

superficie gaussiana sferica con raggio r si ha $\int_S d\vec{s} \cdot \vec{E}(r) \hat{r} = \int_S d\vec{s} \cdot \vec{E}(r) \hat{r} = E(r) \int_S d\vec{s}$

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}(S) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_0 \frac{r^3}{a^3}, \text{ ossia } \vec{E}(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{a^3}.$$

Il potenziale elettrostatico ha la forma Colombiana per $r \geq c$, $\varphi(r \geq c) = k \frac{Q_c + Q_0}{r}$

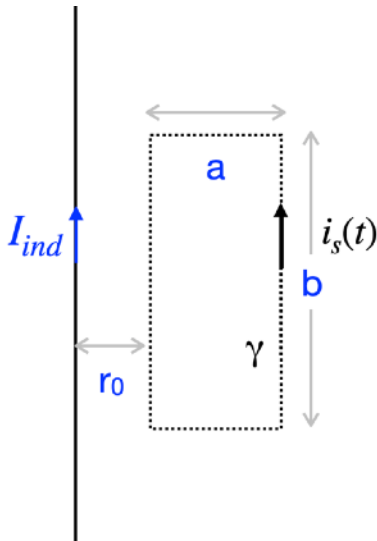
Pertanto a $r=c$ si ha $\varphi(r = c) = k \frac{Q_c + Q_0}{c} = 9 \times 10^9 \times 0.5 \text{ nC}/0.21 = 21.4 \text{ V}$. Pertanto in ogni

punto del conduttore il potenziale elettrostatico varrà $\varphi(b < r < c) = k \frac{Q_c + Q_0}{c}$

Il lavoro (contro il campo elettrico, ossia l'opposto del lavoro che compie il campo elettrico, che equivale al lavoro compiuto dall'opposto della forza elettrica [esercitata dal campo elettrico]:

$-q_1 \vec{E}$) per portare la carica q_1 dalla posizione attuale A (ossia $r=c$) fino alla nuova posizione B (a distanza $3c$ dal centro della sfera) è

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B (-q_1 \vec{E}) \cdot d\vec{l} = -q_1 (\varphi(A) - \varphi(B)) = -\frac{k q_1 (Q_0 + Q_c)}{c} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2k q_1 (Q_0 + Q_c)}{3c} = 9 \times 10^{-12} / 0.63 = 14 \text{ pJ}$$

**Quesito 3 (fino a 12 punti)**

Nel circuito in figura la spira conduttrice rettangolare è percorsa da una corrente $i_s(t)$ nel verso indicato in figura.

$$i_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ i_0 t^2 / \tau^2 & 0 < t < \tau \\ i_0 & t > \tau \end{cases}$$

Dove $\tau = 10$ s e $i_0 = 10$ A, $a=5$ cm, $b=13$ cm, $r_0 = 3$ cm.

Calcolare intensità e segno della corrente indotta nel filo rettilineo I_{ind} in funzione del tempo, assumendo una resistenza ohmica del filo pari a

$$R = 10 \, \Omega.$$

Qual è la forza esercitata dal filo sulla spira ?

In figura sono rappresentati due circuiti: la spira rettangolare γ (di materiale conduttore) percorsa da corrente $i_s(t)$ variabile nel tempo e il filo rettilineo infinito β , anche esso di materiale conduttore, che possiamo immaginare come un circuito che si richiude su se stesso a distanza infinita dalla spira rettangolare. Questo secondo circuito (β) non è collegato a un generatore di forza elettromotrice, pertanto non è percorso da corrente a meno che non si manifesti una corrente effetto di fenomeni di induzione elettromagnetica. In effetti, nella situazione descritta dal problema, si ha induzione elettromagnetica per la legge di Faraday Neumann, perché la corrente $i_s(t)$ che circola in γ produce un campo magnetico $\vec{B}_\gamma$ nello spazio che varia nel tempo e quindi varia nel tempo il suo flusso $\Phi_\beta(\vec{B}_\gamma)$ attraverso il circuito β .

Per Faraday-Neumann quindi in β si ha una f.e.m. indotta pari a $\epsilon_{ind}(\beta) = - \frac{d}{dt} \Phi_\beta(\vec{B}_\gamma)$.

Calcolare in ogni punto dello spazio il campo magnetico $\vec{B}_\gamma$ prodotto dalla corrente variabile nel tempo che circola in γ è possibile, applicando la prima formula di Laplace per correnti filiformi, ma il calcolo è estremamente complesso. Tuttavia, possiamo ricordare che $\Phi_\beta(\vec{B}_\gamma) = i_s M$, quindi

$$\epsilon_{ind}(\beta) = - M \frac{di_s(t)}{dt} \quad (*) \text{ dove } M \text{ e' il coefficiente di mutua induzione dei due circuiti. I coefficienti}$$

di mutua induzione sono simmetrici rispetto al ruolo dei due circuiti quindi $\Phi_\beta(\vec{B}_\gamma) = i_s M$ così'

come $\Phi_\gamma(\vec{B}_\beta) = i_\beta M$, cioè se avessimo una corrente i_β che scorre nel circuito approssimato come un filo rettilineo infinito questo produrrebbe un campo magnetico il cui flusso concatenato con il percorso chiuso γ sarebbe proporzionale a i_β con costante di proporzionalità pari esattamente a M . Pertanto, per risolvere l'eq (*) possiamo calcolare M dalla relazione

$$\Phi_\gamma(\vec{B}_\beta) = i_\beta M. \text{ In questo caso infatti il campo magnetico } \vec{B}_\beta \text{ prodotto da una corrente}$$

stazionaria che scorre in un filo rettilineo è noto (Legge di Biot-Savard: $\vec{B}_\beta = \frac{\mu_0 i_\beta}{2\pi r} \hat{\phi}$, o facilmente derivabile) ed il calcolo del flusso di questo campo attraverso la spira rettangolare è agevole:

$$\Phi_\gamma(\vec{B}_\beta) = i_\beta M = \mu_0 i_\beta \int_{\Sigma_\gamma} \frac{1}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot (-ds \hat{\phi}) \text{ dove } \Sigma_\gamma \text{ rappresenta la superficie con bordo } \gamma$$

orientata secondo la regola della mano destra, per cui ogni elementino di superficie

$d\vec{s} = -drdz\hat{\phi}$ ha normale uscente dal piano della figura. Allora $\Phi_\gamma(\vec{B}_\beta) = i_\beta M = -\mu_0 i_\beta \int_{z_0}^{z_0+b} dz \int_{r_0}^{r_0+a} dr \frac{1}{2\pi r} = -\frac{\mu_0 i_\beta b}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0+a}{r_0}\right)$.

Quindi $i_\beta M = -\frac{\mu_0 i_\beta b}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0+a}{r_0}\right)$ da cui $M = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0+a}{r_0}\right)$.

Allora

$$\epsilon_{ind}(\beta) = -M \frac{di_s(t)}{dt} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0+a}{r_0}\right) \frac{di_s(t)}{dt} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{r_0+a}{r_0}\right) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2i_0 t / \tau^2 & 0 < t < \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

La corrente indotta nel filo

$$I_{ind}(\beta) = \frac{\mu_0 b}{2\pi R} \ln\left(\frac{r_0+a}{r_0}\right) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2i_0 t / \tau^2 & 0 < t < \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

Si osservi che $I_{ind}(\beta) > 0$ cioè una corrente indotta positiva scorre nel filo verso l'alto parallela alla corrente fittizia i_β che ci ha permesso di calcolare il coefficiente di mutua induzione M. Questo è coerente con la legge di Lenz, infatti l'aumento di $i_s(t)$ nel tempo comporta un flusso entrante (nel piano della figura) di campo magnetico attraverso β in aumento; la corrente $I_{ind}(\beta) > 0$ produce un campo magnetico uscente dalla superficie che ha come bordo β pertanto si oppone alla variazione di flusso che la produce.

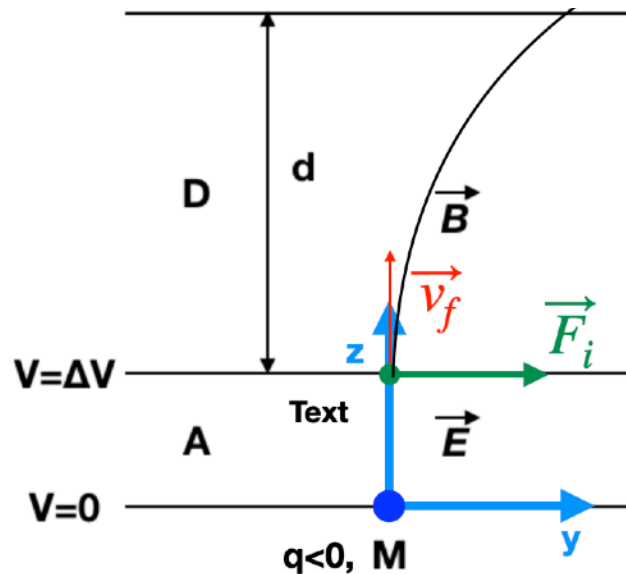
La corrente $I_{ind}(\beta)$ determina una forza sulla spira γ che può essere calcolata con la II formula di Laplace per correnti filiformi: $\oint_\gamma d\vec{F} = \oint_\gamma i_s(t) d\vec{l} \wedge \vec{B}$. A questo integrale i tratti orizzontali della spira concorrono con contributi uguali e opposti che quindi si annullano, mentre i tratti verticali danno

$$\begin{aligned} \vec{F}_\gamma &= \oint_\gamma d\vec{F} = \oint_\gamma i_s(t) d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_{z_0}^{z_0+b} i_s(t) dz \hat{z} \wedge \frac{\mu_0 I_{ind}}{2\pi(r_0+a)} \hat{\phi} + \int_{z_0+b}^{z_0} i_s(t) (-dz) (-\hat{z}) \wedge \frac{\mu_0 I_{ind}}{2\pi r_0} \hat{\phi} \\ &= i_s(t) \left(\frac{\mu_0 I_{ind} b}{2\pi r_0} \hat{r} - \frac{\mu_0 I_{ind} b}{2\pi(r_0+a)} \hat{r} \right) = \frac{\mu_0 I_{ind} i_s(t) b a}{2\pi r_0(r_0+a)} \hat{r}. \end{aligned}$$

Il filo e la spira quindi si respingono reciprocamente.

Quesito 4

Una particella di carica $q < 0$ e di massa M , inizialmente ferma, attraversa la regione (A) compresa tra due elettrodi piani paralleli tra i quali c'è una differenza di potenziale di ΔV ed entra in una regione (D) estesa per una profondità d in cui c'è un campo magnetico uniforme in direzione perpendicolare (entrante) alla direzione del campo elettrico che la ha accelerata. Discutere quale sarà il moto della particella in funzione di d e ΔV , assumendo il modulo di B fissato ed uniforme.



Nella regione A:
$$K_f - K_i = \Delta K = \frac{1}{2} M v_f^2 - 0 = E_{p_i} - E_{p_f} = 0 - q \Delta V$$

All'ingresso della regione B:
$$\vec{F}_i = q \vec{v}_f \wedge \vec{B} = q v_f B \hat{z} \wedge (-\hat{x}) = -q v_f B \hat{y}$$

Nella regione A la particella di carica negativa, prodotta a riposo su un elettrodo, è attratta dall'elettrodo a potenziale più alto (perché si porta nella condizione di minima energia potenziale e, come sappiamo, l'energia potenziale di una particella carica nella posizione $\vec{r}$ è data da $E_p(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$) e quindi è accelerata in direzione verticale verso l'alto (che nel sistema di riferimento che ho scelto è la direzione parallela a $\hat{z}$). Se il campo elettrico è uniforme (non ci sono per esempio effetti di bordo o altre irregolarità) il moto sarà uniformemente accelerato. In ogni caso, la velocità finale $\vec{v}_f$ può essere ottenuta facilmente dalla relazione che esprime la

conservazione dell'energia meccanica. Quindi $v_f = \sqrt{\frac{-2q \Delta V}{M}}$. Subito all'ingresso della regione

D, in cui si ha esclusivamente un campo magnetico uniforme entrante nel piano della figura, quindi nel nostro sistema di riferimento $\vec{B} = -B\hat{x}$, la forza di Lorentz che agisce sulla carica puntiforme è parallela e concorde con l'asse y (il modulo, che si manterrà costante in ogni punto della regione, è calcolato in figura), perpendicolare alla velocità e pertanto agisce come una forza centripeta che fa sì che la traiettoria - entro D - sia un arco di circonferenza.

Il raggio può essere ottenuto eguagliando l'espressione cinematica della forza centripeta alla forza di Lorentz:

$$M \frac{v_f^2}{R} = |q| v_f B.$$

$$\text{Quindi } R = \frac{M}{|q|B} v_f = \sqrt{\frac{2M\Delta V}{|q|B^2}}.$$

La lunghezza della traiettoria in D dipenderà dal confronto di R, raggio di curvatura della traiettoria, e d = profondità della regione in cui si ha campo magnetico. In particolare se $d > R$, la traiettoria sarà un'intera semicirconferenza. In caso contrario, la traiettoria sarà un'arco di circonferenza tanto più breve quanto maggiore è la velocità della particella.

Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si discuta uno degli argomenti elencati:

- 1) Definizione e discussione della Legge di Ampere
 - 1) Enunciato della forma integrale, definizione delle variabili che entrano in gioco nella relazione; limite di correnti stazionarie; forma differenziale (eventualmente ricavata dalla forma integrale o viceversa). *NON si chiede la DIMOSTRAZIONE della legge di Ampère*
- 2) Significato geometrico dei potenziali elettrostatico e potenziale vettore
 - 1) Significato geometrico di gradiente (vettore perpendicolare alle superfici di livello del potenziale elettrostatico) e del rotore. Relazione tra campi di potenziale e campi di forza (campo elettrico e campo magnetico)
- 3) Campi elettrici non conservativi: come produrli ?
 - 1) Con applicazioni della legge di Faraday-Neumann =>> con campi magnetici variabili nel tempo
- 4) Discutere la prima e la seconda legge di Laplace per correnti filiformi.
 - 1) Sono scritte nelle note per correnti volumetriche,

Formule di Laplace:
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$$

- 2) basta adattare alla forma adeguata a correnti ($\vec{J} dV = J \vec{t} ds dl = J ds dl \hat{t} \rightarrow i d\vec{l}$) e spiegarne il significato e l'applicazione.