Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 76 - a.a. 2024-2025

Quesito 1 (fino a 12 punti)

Si consideri il sistema costituito da una distribuzione di carica cilindrica, con L>>R e densità costante ρ =ρ_0, contenuto all'interno della cavita' di uno strato conduttore di raggio interno R_i e raggio esterno R_e elettricamente neutro. Gli assi del conduttore e della distribuzione di carica coincidono entrambi con l'asse z del sistema di riferimento.
1) Chiamata *r* la distanza di un punto generico dello spazio dall'asse, si calcoli il campo elettrico per $r < R$, $R < r < R_i$, $R_i < r < R_e$ e infine $r > R_e$
2) Si calcoli la differenza di potenziale tra il conduttore e la superficie esterna della distribuzione di carica, ossia $\phi(R_i) - \phi(R)$.

La distribuzione di carica ha simmetria cilindrica, cioè la densita' di carica dipende solo dalla distanza r da una retta nello spazio che e' l'asse di simmetria cilindrica del sistema. Pertanto anche il potenziale elettrostatico φ e il campo elettrico $\overrightarrow{E}$ dipenderanno solo da r; Inoltre, dal momento che il campo elettrico è il gradiente del potenziale elettrostatico cambiato di segno ($\overrightarrow{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial}{\partial r}\varphi\hat{r} + \ldots$ (*)) sara' diretto come $\hat{r}$ versore del piano perpendicolare all'asse di simmetria, diretta in ogni punto secondo la direzione radiale uscente (* si noti che le altre componenti del gradiente, nella direzione azimuthale e nella direzione z, sono proporzionali a derivate parziali del potenziale rispetto alle coordinate ϕ e z, e sono pertanto nulle). Pertanto possiamo calcolare il campo elettrico in ogni punto dello spazio (ossia ad ogni distanza r dall'asse di simmetria) applicando la legge di Gauss a una superficie cilindrica C coassiale alla distribuzione di raggio di base r e altezza arbitraria h. La legge di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa (per esempio C) e' pari alla quantità di carica complessivamente contenuta in C divisa per la costante dielettrica del vuoto.
Fissati r e h il flusso del campo elettrico attraverso C (che scomponiamo nelle due base e nella superficie laterale) e' dato da:

$$\int_C \overrightarrow{E}\cdot d\vec{s} = \int_{S_L} \overrightarrow{E}\cdot ds\hat{r} + \int_{B_{down}} \overrightarrow{E}\cdot(-ds\hat{z}) + \int_{B_{up}} \overrightarrow{E}\cdot ds\hat{z}\ .$$

Dal momento che $\overrightarrow{E} = E(r)\hat{r}$ il prodotto scalare con gli elementi infinitesimi di superficie e' diverso da zero solo sulla superficie laterale, quindi

$$\int_C \overrightarrow{E}\cdot d\vec{s} = \int_{S_L} \overrightarrow{E}\cdot ds\hat{r} = E(r)\int_{S_L} ds = E(r)\ 2\pi r.$$

La carica contenuta all'interno di C dipende da r. In particolare si ha

$$Q_{int}(C) = \begin{cases} \rho_0\pi r^2\ h & r < R \\ \rho_0\pi R^2\ h & R < r < R_i \\ \rho_0\pi R^2\ h + Q^{ind}_{sup_i} & R_i < r < R_e \\ \rho_0\pi R^2\ h + Q^{ind}_{sup_i} + Q^{ind}_{sup_e} & r > R_r \end{cases}$$

Con $Q^{ind}_{sup_i}$ indico la carica indotta sulla superficie interna del conduttore cilindrico, contenuta all'interno della superficie C. Essa sara' distribuita uniformemente dalla la simmetria con una densita' superficiale di carica tale per cui $Q^{ind}_{sup_i} = \sigma^{ind}_{sup_i}\ 2\pi R_i\ h$. Per stabilire il valore di $Q^{ind}_{sup_i}$ basta considerare il fatto che all'interno del conduttore, cioe' ogni punto con per $R_i < r < R_e$ il campo elettrico e' nullo. Pertanto $\int_C \overrightarrow{E}\cdot d\vec{s} = 0$. Percio' $Q^{ind}_{sup_i} = -\rho_0\pi R^2 h$ e $\sigma^{ind}_{sup_i} = -\rho_0 R^2/(2R_i)$.

Con $Q^{ind}_{sup_e}$ invece indico la carica indotta sulla superficie esterna del conduttore cilindrico, contenuta all'interno della superficie C. Dalla neutralità del conduttore discende che $Q^{ind}_{sup_e} = -Q^{ind}_{sup_i}$, pertanto $\sigma^{ind}_{sup_e} = \rho_0 R^2/(2R_e)$.
In definita

$$Q_{int}(C) = \begin{cases} \rho_0 \pi r^2\ h & r < R \\ \rho_0 \pi R^2\ h & R < r < R_i \\ 0 & R_i < r < R_e \\ \rho_0 \pi R^2\ h & r > R_r \end{cases}$$

pertanto applicato Gauss si ha $\vec{E} = \begin{cases} \rho_0 \frac{r}{2\epsilon_0}\hat{r} & r < R \\ \rho_0 \frac{R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & R < r < R_i \\ 0 & R_i < r < R_e \\ \rho_0 \frac{R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & r > R_r \end{cases}$.

La differenza di potenziale tra il conduttore e la superficie esterna della distribuzione di carica, ossia $\phi(R_i) - \phi(R)$ puo' essere calcolata applicando la definizione:

$$\phi(R_i) - \phi(R) = -\int_R^{R_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_R^{R_i} \rho_0 \frac{R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} \cdot dr\hat{r} = -\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_i}{R}\right).$$

Quesito 2 (fino a 12)

Il campo magnetico sull'asse di un solenoide percorso dalla corrente *i*, di lunghezza L, raggio R e densità lineare di spire n, è diretto lungo l'asse del solenoide e il suo modulo dipende dalla distanza x dal centro del solenoide come segue:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i n}{2}\left(\frac{L+2x}{\sqrt{(L+2x)^2+4R^2}} + \frac{L-2x}{\sqrt{(L-2x)^2+4R^2}}\right)\hat{x}.$$

Si applichi la legge di Ampere per dimostrare che nell'approssimazione di L infinita il campo è pari a $\vec{B} = \mu_0 i n \hat{x}$ in ogni punto dello spazio interno al solenoide, mentre è nullo all'esterno.

Osserviamo che l'espressione del campo prodotto da un solenoide reale sui punti dell'asse $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i n}{2}\left(\frac{L+2x}{\sqrt{(L+2x)^2+4R^2}} + \frac{L-2x}{\sqrt{(L-2x)^2+4R^2}}\right)\hat{x}$ ammette il limite seguente per $L \to +\infty$, $\lim_{L\to+\infty} \vec{B}(x) = \mu_0 i n \hat{x}$. Ora dimostriamo che questa espressione per $L \to +\infty$ vale anche per qualunque punto interno al solenoide indipendentemente dalla distanza dall'asse.
Utilizziamo perciò la legge di Ampere, applicandola a un circuito rettangolare ABCD che ha un lato (AB) di lunghezza h sull'asse del solenoide e i due lati ad esso perpendicolari (BC e poi DA) di lunghezza r<R. Orientiamo il circuito in modo arbitrario, per esempio in modo da percorrere il tratto sull'asse secondo il verso in cui cresce la coordinata x. Allora, $\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$.

Alla circuitazione contribuiscono solo i tratti paralleli all'asse:

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{x_A}^{x_B} B(0)\hat{x} \cdot dx\hat{x} + \int_{r_B}^{r_C} B(r)\hat{x} \cdot dr\hat{r} - \int_{x_D}^{x_C} B(r)\hat{x} \cdot dx\hat{x} - \int_{r_A}^{r_D} B(r)\hat{x} \cdot dr\hat{r} =$$

$$= \int_{x_A}^{x_B} \mu_0 in \hat{x} \cdot dx \hat{x} - \int_{x_D}^{x_C} B(r)\hat{x} \cdot dx \hat{x} = \mu_0 inh - B(r)h.$$

La corrente concatenata con questo circuito e' nulla (non ci sono correnti che attraversano la superficie che ha come bordo il percorso rettangolare ABCD). Quindi $\mu_0 inh - B(r)h = 0$, perciò $B(r) = \mu_0 in\ \forall r < R$.

Dimostriamo ora che il campo e' nullo all'esterno.

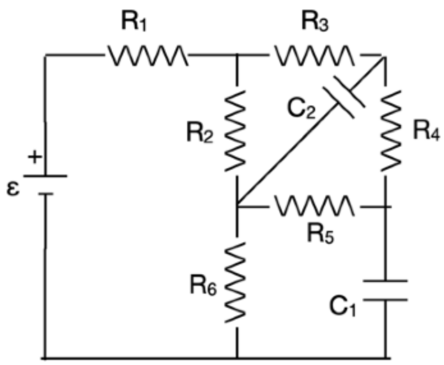
Applichiamo la legge di Ampere a un circuito rettangolare ABCD che ha un lato AB di lunghezza h sull'asse del solenoide e i due lati ad esso perpendicolari (BC e poi DA) di lunghezza r>R, cosi' che l'altro lato parallelo all'asse sia esterno al solenoide.

l'altro (BC e poi DA) di lunghezza r<R. Orientiamo il circuito come prima.

Allora, $\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$. La circuitazione come prima vale

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 inh - B(r)h.$$

Questa volta pero' il circuito e' attraversato da alcune spire del solenoide, quindi $i_c = inh$. Dalla legge di Ampere discende $\mu_0 inh - B(r)h = \mu_o inh$ che implica $B(r) = 0\ \forall r > R$.

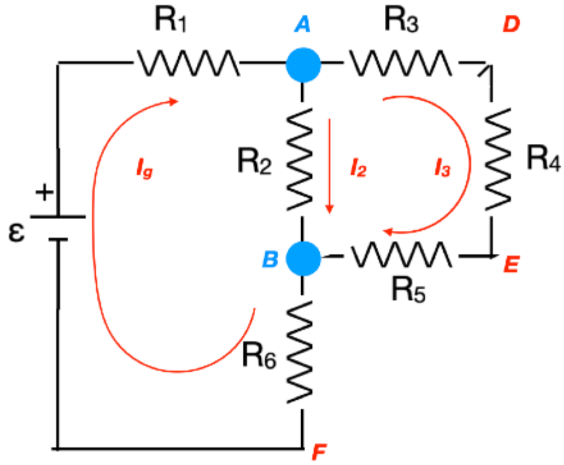


Quesito 3 (fino a 12 punti)

Determinare la potenza erogata dal generatore e la d.d.p. ai capi del condensatore di capacità C_2 in condizioni di regime se la sua capacità è pari a 50 pF.

Si assumano i seguenti valori per i parametri del circuito: R_1=500 Ω, R_2=400 Ω, R_3=150 Ω, R_4=100 Ω, R_5=150 Ω, R_6=500 Ω, ε=30 V,

C_1=0.1 nF.



Il circuito a regime e' equivalente al circuito in figura. Infatti, a regime i condensatori sono carichi e si oppongono alla circolazione di corrente nei rami in cui si trovano, quindi possono a tutti gli effetti essere sostituiti con interruttori aperti, il che equivale a eliminare dal circuito i rami che contengono condensatori.

La ddp ai capi del condensatore 2 e' $\varphi(D) - \varphi(B) = I_3(R_4 + R_5)$ e la carica sulle armature sara' $Q_2 = C_2\big(\varphi(D) - \varphi(B)\big)$.

La ddp ai capi del condensatore 1 e' $\varphi(E) - \varphi(F) = I_3 R_5 + I_g R_6$ e la carica sulle armature sarà $Q_1 = C_1\big(\varphi(E) - \varphi(F)\big)$. Occorre quindi determinare i valori delle correnti I_g, I_2 e I_3 utilizzando l'equazione al nodo A: $I_g = I_2 + I_3$ (si noti che il nodo B fornisce la stessa informazione) e due equazioni alle maglie. Ad esempio per la maglia con generatore, R1, R2 e R6 abbiamo:

$\epsilon = I_g\big(R_1 + R_6\big) + I_2 R_2$ e dalla maglia con R1, R2, R4 e R6 abbiamo

$I_2 R_2 = I_3(R_3 + R_4 + R_5)$ (**). Allora,

$\epsilon = (I_2 + I_3)\left(R_1 + R_6\right) + I_2 R_2 = I_2\left(R_1 + R_2 + R_6\right) + I_2 \dfrac{R_2}{R_3 + R_4 + R_5}\left(R_1 + R_6\right)$. Risolvendo questa equazione posso ricavare I_2 e poi dalla (**) I_3 e, infine, I_g somma di I_2 e I_3 .
Alternativamente, posso osservare che le resistenze del circuito (a regime) sono collegate in questo modo: R3, R4 e R5 sono in serie. La loro serie $R_{345} = R_3 + R_4 + R_5$ e' in parallelo con R2 e la loro resistenza equivalente $R_{2345} = \dfrac{R_{345}R_2}{R_{345} + R_2}$ e' in serie con R1 e R6. Quindi la resistenza eq. complessiva del circuito e' $R_{eq} = R_1 + R_6 + R_{2345}$.
La corrente nel ramo del generatore

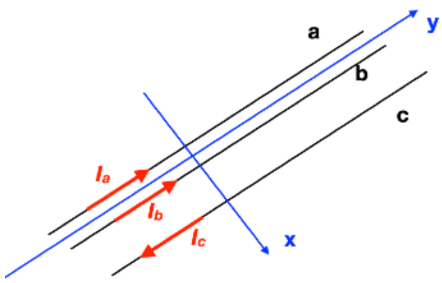
$$I_g = \frac{\epsilon}{R_{eq}} = \begin{cases} \frac{20\ \mathrm{V}}{950\ \Omega} = 21\ \mathrm{mA} & \text{testo } a \text{ e } b \quad R_{345} = 300\ \Omega,\ R_{2345} = 150\ \Omega \\ \frac{30\ \mathrm{V}}{1200\ \Omega} = 25\ \mathrm{mA} & \text{testo } c \quad R_{345} = 400\ \Omega,\ R_{2345} = 200\ \Omega \end{cases}$$

Usando l'eq al nodo e l'eq $I_2 R_2 = I_3(R_3 + R_4 + R_5)$ trovo
$I_g = I_3 + I_3 \dfrac{R_{345}}{R_2}$. Si noti inoltre che dati i valori delle resistenze risulta $R_2 = R_{345}$ quindi

$$I_2 = I_3 = I_g/2 = \begin{cases} 10.5\ \mathrm{mA} & \text{testo } a \text{ e } b \\ 12.5\ \mathrm{mA} & \text{testo } c \end{cases}.$$

Nel testo *a*, *l*a ddp ai capi del condensatore 1 e' $\varphi(E) - \varphi(F) = I_3 R_5 + I_g R_6$ = 2.1 V e la carica sulle armature sarà $Q_1 = C_1\left(\varphi(E) - \varphi(F)\right)$ = 210 pC.
Nel testo *b*, *l*a ddp ai capi del condensatore 2 e' $\varphi(D) - \varphi(B) = I_3(R_4 + R_5)$ = 2.6 V e la carica sulle armature sarà $Q_2 = C_2\left(\varphi(D) - \varphi(B)\right)$ = 131 pC.
Nel testo *c*, *l*a ddp ai capi del condensatore 2 e' $\varphi(D) - \varphi(B) = I_3(R_4 + R_5)$ = 6.25 V. La potenza erogata dal generatore $P_{erogata} = \epsilon I_g = 750\ \mathrm{mW}$.

Quesito 4 (fino a 12 punti)
Si considerino tre fili conduttori rettilinei e infinitamente lunghi paralleli all'asse y, che denominiamo a, b, c. Essi sono percorsi dalle correnti I_a, I_b e I_c che scorrono nei versi indicati in figura. Sia $I_a = I_b$ = 10 A e I_c = 30 A. Chiamiamo le coordinate dei fili nel piano
x_a, x_b e x_c con $x_b = 2$ cm, $x_c = 5x_b$ e $x_a = -x_b$.
Si calcoli la forza (direzione , verso e modulo) che agisce su un tratto di lunghezza unitaria del filo conduttore c.



Un filo rettilineo infinito percorso da corrente determina il campo magnetico descritto dalla legge di Biot Savard: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi\ r}\hat{\phi}$. Ciascuno dei tre fili in figura sara' soggetto alla forza dovuta al campo magnetico prodotto dagli altri due che agisce sulla sua corrente. Occorre quindi calcolare, sfruttando il principio di sovrapposizione il campo magnetico totale sul filo e poi calcolare la forza su un tratto infinitesimo del filo stesso con la formula di Laplace. Quindi la forza su un tratto $d\vec{l}_c$ del filo c percorso dalla corrente i_c sara' dato da $d\vec{F}_c = i_c d\vec{l}_c \wedge \vec{B}_{ab}(x_c)$ dove $\vec{B}_{ab}(x_c)$ e' il campo magnetico prodotto dai fili a e b nei punti del filo c ch sei trovano tutti alla coordinata x_c.
Allora, usando il sistema di coordinate adottato in figura calcoliamo
$\vec{B}_{ab}(x_c)$, $\vec{B}_{bc}(x_a)$ e $\vec{B}_{ac}(x_b)$.

$$\vec{B}_{ab}(x_c) = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi\ 6x_b}(-\hat{z}) + \frac{\mu_0 i_b}{2\pi\ 4x_b}(-\hat{z}) = -\frac{\mu_0}{2\pi x_b}\frac{2i_a+3i_b}{12}\hat{z} =$$

$$-\frac{4\pi\times10^{-7}}{2\pi\times2\times10^{-2}}\frac{2\times10+3\times10}{12}\hat{z} = -\frac{2\times10^{-7}}{2\times10^{-2}}\frac{50}{12}\hat{z} = -4.17\times10^{-5}\ \mathrm{T}\ \hat{z}$$

$$\vec{B}_{ac}(x_b) = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi\ 2x_b}(-\hat{z}) + \frac{\mu_0 i_c}{2\pi\ 4x_b}(-\hat{z}) = -\frac{\mu_0}{2\pi x_b}\frac{2i_a+i_c}{4}\hat{z} =$$

$$-\frac{2\times10^{-7}}{2\times10^{-2}}\frac{50}{4}\hat{z} = -12.5\times10^{-5}\ \mathrm{T}\ \hat{z}$$

$$\vec{B}_{bc}(x_a) = \frac{\mu_0 i_b}{2\pi\ 2x_b}\hat{z} + \frac{\mu_0 i_c}{2\pi\ 6x_b}(-\hat{z}) = \frac{\mu_0}{2\pi x_b}\frac{3i_b-i_c}{6}\hat{z} = 0.$$

Allora

$$\frac{d\vec{F}_c}{dl} = -i_c\hat{y}\wedge\vec{B}_{ab}(x_c) = -30 \times (-4.17 \times 10^{-5})\ \hat{y}\wedge\hat{z} = 125 \times 10^{-5}\,\hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

$$\frac{d\vec{F}_a}{dl} = i_a\hat{y}\wedge\vec{B}_{bc}(x_a) = 0$$

$$\frac{d\vec{F}_b}{dl} = i_b\hat{y}\wedge\vec{B}_{ac}(x_b) = 10 \times (-12.5 \times 10^{-5})\ \hat{y}\wedge\hat{z} = -125 \times 10^{-5}\,\hat{x}\ \mathrm{N/m}$$

Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) La corrente di spostamento ed equazione di Ampere-Maxwell
2) Si discuta l'eq. di Poisson e si scriva la soluzione generale che discende dalla legge di Coulomb e dal principio di sovrapposizione.
3) Capacità equivalente della serie e parallelo di due condensatori
4) Caratteristiche generali dei conduttori all'equilibrio elettrostatico.

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $\quad d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\ dV$