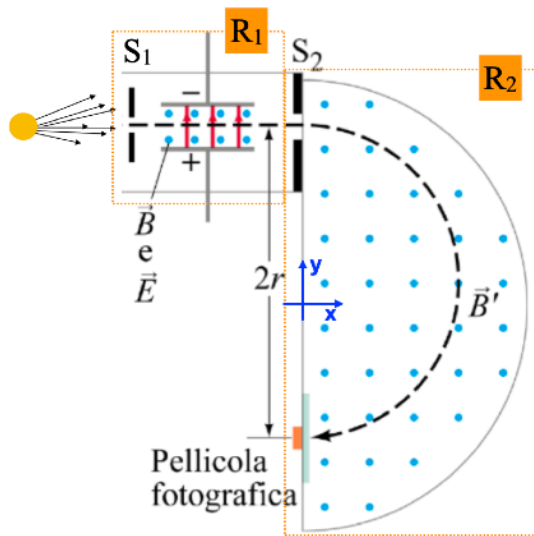


Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 78 - a.a. 2024-2025



Quesito 1 (fino a 12 punti)

In figura è illustrato lo schema di uno spettrometro di massa (regione R_2) preceduto da un selettore di velocità (regione R_1). Il dispositivo permette di misurare la massa di una particella carica (tipicamente un atomo ionizzato, di carica $|e|$) mediante la misura della distanza $2r$, cioè del diametro della traiettoria circolare dello ione in un campo magnetico uniforme $\vec{B}' = B_2 \hat{z}$. Consideriamo una sorgente di particelle di massa m e carica $q=|e|$ prodotte con velocità di direzione e modulo casuale. Le particelle che attraversano il foro nello schermo S_1 entrano nel selettore di velocità R_1 in cui sono presenti i campi $\vec{E} = E_1 \hat{y}$ e $\vec{B} = B_1 \hat{z}$ perpendicolari l'uno all'altro e uniformi. Dimostrare che le particelle che attraversano il foro sullo schermo S_2 , allineato con il foro su S_1 , hanno tutte la stessa energia cinetica e calcolarla in funzione delle

proprietà delle particelle e del selettore di velocità. Determinare la relazione tra la distanza $2r$ e la massa delle particelle ionizzate.

Le particelle in R_1 sono soggette a una forza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = qE_1 \hat{y} + q(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}) \wedge B_1 \hat{z} = qE_1 \hat{y} - qv_x B_1 \hat{y} + qv_y B_1 \hat{x}.$$

Dal momento che le particelle hanno attraversato il foro sullo schermo S_1 , esse si propagano in sostanza in direzione orizzontale (lungo l'asse x) quindi $v_y \ll v_x$ e pertanto

$\vec{F}_{R_1} = qE_1 \hat{y} - qv_x B_1 \hat{y}$. Questa forza diretta verso y , tende a deviare la traiettoria in direzione verticale (lungo l'asse y). Quindi potranno passare raggiungere e attraversare il foro in S_2 solo le particelle con velocità v_x tale che la forza $\vec{F}_{R_1} = 0$, ossia $v_x = E_1/B_1$. Pertanto il sistema R_1 è chiamato selettore di velocità, infatti permette il passaggio (e l'ingresso nello spettrometro solo di particelle che hanno velocità $\vec{v} = \frac{E_1}{B_1} \hat{x}$). L'energia cinetica delle particelle che entrano nello

spettrometro pertanto è $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{mE_1^2}{2B_1^2}$. Queste particelle di velocità selezionata in R_2

saranno soggette ad un moto circolare uniforme causato dalla forza di Lorentz

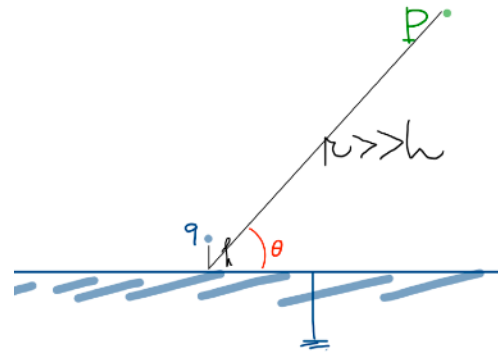
$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = |e| \frac{E_1}{B_1} \hat{x} \wedge B_2 \hat{z} = -|e| \frac{E_1 B_2}{B_1} \hat{y}.$$

Usando $m \frac{v^2}{r} = F_L$ si ottiene $mv^2 = |e| r \frac{E_1 B_2}{B_1}$, ossia (sostituendo a v il suo valore)

$$r = \frac{mE_1}{|e|B_1B_2}$$

Quesito 2 (fino a 16 punti)

Si consideri un piano infinito conduttore a potenziale nullo e una carica puntiforme $q=1\text{fC}$ a distanza $h=1\text{ mm}$ dal piano. Scelto come origine del sistema di riferimento il punto O del piano più vicino alla carica q (corrispondente alla proiezione della carica q sul piano), calcolare il potenziale elettrostatico in punti distanti $r=0.2\text{ m}$ dall'origine in funzione dell'angolo θ . Si calcoli inoltre il campo elettrico nei punti $A=(0.2\text{ m}, \theta=0)$ e $B=(0.2\text{ m}, \theta=\pi/2)$ e la densità superficiale di carica nel punto O del piano conduttore più vicino alla carica q e nel punto A.

**La carica puntiforme in prossimità del piano conduttore**

a potenziale nullo induce carica elettrica sulla superficie del conduttore e il campo in un punto generico dello spazio è la sovrapposizione del campo prodotto dalla carica puntiforme e dalla distribuzione di carica indotta superficiale sul piano conduttore. Per determinare gli effetti di quest'ultima possiamo ricordare che il problema generale dell'elettrostatica (ossia la determinazione della soluzione dell'eq di Laplace per il potenziale elettrostatico, note le condizioni al contorno, cioè i valori di cariche o potenziali su tutti i conduttori presenti nel sistema, fissato il potenziale nullo sulla superficie di contorno) ammette una soluzione unica $\Rightarrow$ il metodo delle cariche immagine, consiste nel determinare un sistema di cariche fittizie che riproducono le condizioni al contorno del problema matematico generale. Il campo elettrico (e potenziale elettrostatico determinato con le cariche fittizie saranno identici a quelli del problema reale nella regione dello spazio entro le condizioni al contorno riprodotte, per l'unicità della soluzione. Allora, al piano infinito + carica puntiforme a distanza h , corrisponde il sistema di cariche immagine costituito dalla carica q nel punto $P(0,0,h)$, ossia a distanza h dal piano (puramente geometrico) $z=0$, e dalla carica $-q$ nel punto $P'=(0,0,-h)$. Queste due cariche, opposte ed equidistanti da ogni punto del piano $z=0$, rendono il piano $z=0$ equipotenziale al valore $\varphi = 0, \forall P(x, y, z = 0)$; inoltre il potenziale elettrostatico attorno a $P(0,0,h)$ sarà Colombiano da carica sorgente q e il potenziale a distanza infinita sarà $\varphi = 0$. Quindi possiamo calcolare il campo nel punto P come il campo di dipolo con $\vec{p} = q2h\hat{z}$, visto che $r \gg h$. Il potenziale elettrostatico sarà quindi

$$\varphi(r, \theta) = k \frac{2qh\hat{z} \cdot \vec{r}}{r^3} = k \frac{2qh r \sin \theta}{r^3} = k \frac{2hq \sin \theta}{r^2}.$$

Il punto $A(r=0.2, \theta = 0)$ appartiene alla superficie del piano conduttore sappiamo quindi che il campo elettrico sarà perpendicolare al piano. Utilizziamo l'espressione del campo di dipolo e teniamo conto che per A si ha $\vec{r}_A = h\hat{r}$ con $\hat{r} \perp \hat{z} \parallel \vec{p}$.

$$\text{Quindi risulta } \vec{E}(A) = \vec{E}(r=h, \theta=0) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} =$$

$$-k \frac{r^2\vec{p}}{r^5} = -\frac{2kqh}{r^3}\hat{z} = -\frac{2 \times 9 \times 10^9 \times 10^{-15} \times 10^{-3}}{0.2^3}\hat{z} = -225 \times 10^{-8} \text{ V/m } \hat{z}.$$

Nel punto $B(r=0.2\text{ m}, \theta=\pi/2)$ si ha $\vec{r}_B = r\hat{z} \parallel \vec{p}$, allora il campo $\vec{E}(B) = \vec{E}(r=h, \theta=\pi/2) =$

$$k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} = k \frac{2r^2\vec{p}}{r^5} = k \frac{2\vec{p}}{r^3} = \frac{4kqh}{r^3}\hat{z} = 450 \times 10^{-8} \text{ V/m } \hat{z}.$$

La densità superficiale di carica nel punto O, per le proprietà dei conduttori (discontinuità del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato superficiale carico), sarà

$$\sigma_O = \epsilon_0 E_z(0) = -2 \frac{1}{4\pi} \frac{q}{h^2} = -\frac{10^{-15}}{2\pi \cdot 10^{-6}} = 0.16 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

Quesito 3 (fino a 12 punti)

Si calcoli il coefficiente di auto induzione di un solenoide di lunghezza $L=40$ cm, raggio $R=7$ cm costituito da 2000 spire. All'istante di tempo $t=0$, la bobina e' collegata in serie a un resistore di $1k\Omega$ e a un generatore di f.e.m. di 10 V. Si determini l'andamento nel tempo della corrente nelle spire della bobina. Dopo quanto tempo dall'accensione del circuito la corrente raggiunge il 90% del valore finale ?

Il solenoide produce il campo magnetico

$$\vec{B} = \mu_0 i n \hat{z} = 4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-2} \times \frac{2000}{0.4} \hat{z} = 2\pi \times 10^{-5} \text{ T } \hat{z}.$$

Il flusso del campo magnetico collegato con una singola spira e' $\Phi_{1s}(\vec{B}) = B\pi R^2$ e quindi il flusso concatenato con il solenoide e'

$$\Phi_{\text{solenoid}}(\vec{B}) = \Phi_{Ns}(\vec{B}) = NB\pi R^2 = 2 \times 10^3 \times 2\pi \times 10^{-5} \times \pi \times (7 \times 10^{-2})^2 = 1.9 \times 10^{-3} \text{ Weber}$$

Il coefficiente di autoinduttanza di un circuito γ percorso dalla corrente i che produce il campo $\vec{B}$ e' definito da $\vec{\Phi}_\gamma(\vec{B}) = iL$.

Quindi per il solenoide

$$L = \Phi_{\text{solenoid}}(\vec{B})/i = \Phi_{Ns}(\vec{B}) = NB\pi R^2 = N\mu_0 n \pi R^2 = \frac{1.9 \times 10^{-3} \text{ Weber}}{10^{-2} \text{ A}} = 0.19 \text{ Henry.}$$

L'equazione del circuito e'

$$\epsilon - L \frac{di}{dt} = Ri \text{ dal momento che l'autoinduttanza del solenoide produce una f.e.m indotta che}$$

$$\text{per la legge di Faraday Neumann e' uguale a } \epsilon_{\text{indotta}} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt}.$$

La soluzione dell'eq procede con questo passaggi $L \frac{di}{dt} = \epsilon - Ri$; quindi $\frac{L di}{\epsilon - Ri} = dt$ e integrando dal tempo 0 al tempo t generico e in, corrispondenza tra $i(t=0)$ a $i(t)$ si ha

$$-\frac{L}{R} \ln(\epsilon - Ri) \Big|_{i(0)}^{i(t)} = t \text{ e quindi } \frac{\epsilon - Ri(t)}{\epsilon - Ri(0)} = e^{-t/\tau} \text{ con } \tau = L/R.$$

Dal momento che a $t=0$, $i=0$ si ha $i(t) = \frac{\epsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau})$. Il valore asintotico della corrente

$i(t \rightarrow \infty) = \frac{\epsilon}{R}$ e l'istante di tempo in cui il valore sara' il 90% del valore asintotico e' dato dalla

$$\text{condizione } 0.9 = 1 - e^{-t/\tau} \rightarrow e^{-t/\tau} = 0.1 \rightarrow t = -\tau \ln 0.1 = -\frac{L}{R} \ln 0.1 = 0.44 \text{ ms.}$$

Quesito 4 (fino a 10 punti)

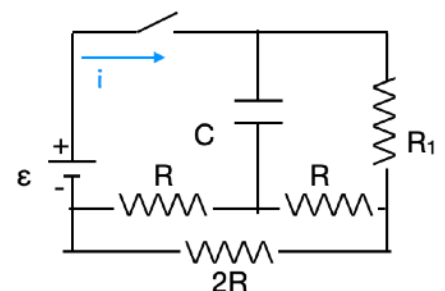
Si determini la corrente in ogni ramo del circuito indicato in figura ad un istante di tempo t molto distante dal momento in cui l'interruttore e' stato chiuso. I parametri del circuito sono

$R = 1 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$, $C=1\mu\text{F}$, $\epsilon = 10 \text{ V}$.

Si determini l'energia accumulata nel condensatore nello stesso istante di tempo.

A regime la resistenza eq complessiva e'

$$R_{eq} = R_1 + R = R_1 + \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = \frac{2R(R + R)}{2R + (R + R)} = 3k\Omega.$$



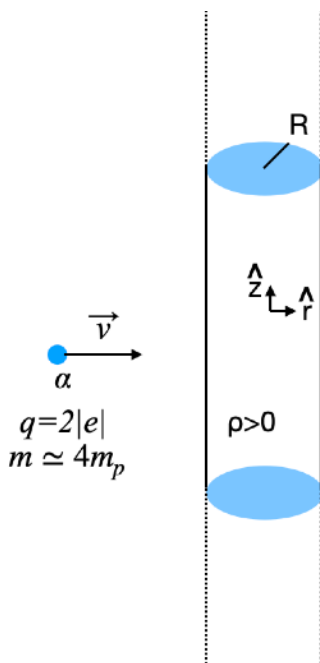
La corrente che scorre nel generatore e' la stessa che scorre in R1, i1, ed e' doppia rispetto a quella, i2, che scorre negli altri due rami (uno con la resistenza 2R e l'altro con due resistenze di valore R ciascuna).

$$i_g = i_1 = \frac{\epsilon}{R_{eq}} = 10 \text{ V} / 3 \text{ k}\Omega = 3.33 \text{ mA}, \text{ invece } i_2 = 1.67 \text{ mA}.$$

L'energia accumulata dal condensatore sara' $E_c = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$ con

$$\Delta V = i_1 R_1 + i_2 R = 3.33 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^3 + 1.67 \times 10^{-3} \times 10^3 = 8.33 \text{ V}$$

$$\text{Pertanto, } E_c = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = 34.7 \times 10^{-12} \text{ J}.$$



Quesito 5 (fino a 12 punti)

Considerato un cilindro di raggio $R=100 \mu\text{m}$ uniformemente carico con densità volumetrica di carica $\rho>0$, si calcoli l'energia cinetica minima che deve avere una particella alfa, che viaggia verso l'asse del cilindro in direzione perpendicolare ad esso, quando si trova ad una distanza dall'asse pari a 1 mm. Si assuma $\rho=1\mu\text{C}/\text{m}^3$.

L'energia cinetica minima della particella corrisponde al fatto che essa raggiunga la distanza $r=0$ dall'asse del cilindro con velocità nulla. Dal momento che e' soggetta a forze conservative, possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica

$$E_{ki} + E_{pi} = E_{kf} + E_{pf} \text{ con } E_{kf} = 0 \text{ e}$$

$$E_{pf} - E_{pi} = q_\alpha (\varphi(r=0) - \varphi(r=10R)) =$$

$$q_\alpha (\varphi(r=0) - \varphi(R) + \varphi(R) - \varphi(r=10R)).$$

Occorre quindi calcolare le differenze di potenziale

$\varphi(0) - \varphi(R)$ e $\varphi(R) - \varphi(10R)$. Per far questo calcoliamo il campo elettrico nelle due regioni dello spazio: interna ed esterna alla distribuzione.

Il campo elettrico ha simmetria cilindrica quindi e' diretto come il versore del piano perpendicolare all'asse radiale uscente e dipende

solo da r . Usiamo allora una superficie cilindrica chiusa di raggio r (generico) e altezza h arbitraria per calcolare il flusso del campo elettrico e poi applicare la legge di Gauss per determinare il modulo del campo a $r<R$ e $r>R$.

$\Phi_{S_c}(\vec{E}) = 2\pi r h E(r)$ perche' al flusso contribuisce solo al superficie laterale della superficie cilindrica.

$$Q_{S_c}(\text{interna})/\epsilon_0 = \begin{cases} \pi r^2 h \rho & r < R \\ \pi R^2 h \rho & r > R \end{cases}$$

$$\text{Quindi } \vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{r\rho}{2\epsilon_0} \hat{r} & r < R \\ \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0 r} \hat{r} & r > R \end{cases}$$

$$\varphi(0) - \varphi(R) = \int_0^R \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

$$\varphi(R) - \varphi(10R) = \int_R^{10R} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_R^{10R} \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(10).$$

$$\text{Quindi } \varphi(0) - \varphi(10R) = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(10) = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0} (1 + 2 \ln 10) =$$

$$9 \times 10^9 \times \pi \times 10^{-6} \times 10^{-8} \times 5.6 = 1.58 \text{ mV.}$$

$$E_{k1} = E_{p_f} - E_{p_i} = q_\alpha (\varphi(0) - \varphi(10R)) =$$

$$2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.58 \text{ mV} = 3.16 \times 10^{-3} \text{ eV} = 3.16 \text{ meV}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_\alpha} E_{k1}} = \sqrt{\frac{2}{4 \times 10^{-27}} 3.16 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19}} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{10^{-27}} 3.16 \times 10^{-3} \times 0.8 \times 10^{-19}} \simeq 5 \times 10^2 \text{ m/s}$$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta **solo uno** degli argomenti elencati:

- 1) Illustrare l'utilizzo della legge di Ampere per il calcolo del campo magnetico in un caso semplice e a scelta.
- 2) Si discuta il modello di conduzione di Drude.
- 3) Si discutano le condizioni di continuità del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato superficiale carico.
- 4) Si dimostri la forma differenziale della legge di Faraday Neumann a partire dalla formulazione integrale.

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m},$$

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

$$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}, m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}, M_{\text{He}} \simeq 4 m_p$$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ prodotti da una carica puntiforme: $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2} \hat{r}; \quad \varphi(r) = k \frac{q}{r}$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ di dipolo: $\vec{E}(r, \vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}; \quad \varphi(r, \vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5};$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$