

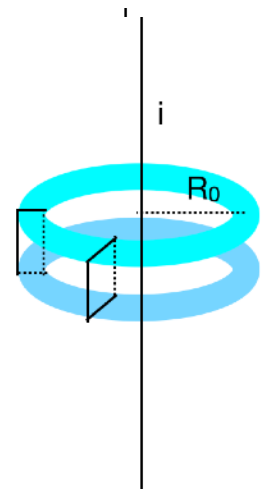
## Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 79 - a.a. 2024-2025

### Quesito 1 (fino a 12 punti) - versione C

Si consideri un filo rettilineo di lunghezza infinita parallelo all'asse  $z$ , percorso dalla corrente stazionaria  $i_f = 20$  A nel verso positivo dell'asse  $z$  e un solenoide toroidale costituito da  $10^5$  spire collocate su un toro circolare di raggio medio  $R_0 = 20$  cm con centro sul filo e a sezione rettangolare, con lati di 3 cm (in direzione  $z$ ) e 2 cm in direzione radiale.

1) Si calcoli il flusso del campo magnetico prodotto dalla corrente nel filo rettilineo concatenato con la bobina toroidale e il coefficiente di mutua induzione dei due circuiti.

2) Si valuti, in funzione del tempo, la corrente indotta nell'avvolgimento della bobina se la sua resistenza  $R_t$  è pari  $20 \Omega$  e se a partire da un certo istante di tempo, che assumiamo come zero, la corrente nel filo diminuisce con la



$$\text{legge } i_f(t) = \begin{cases} I_0 & \text{per } t < 0; \\ I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{3}{4}\tau \text{ con } I_0 = 10 \text{ A e } \tau = 50 \text{ s.} \\ 0 & \text{per } t > \frac{3}{4}\tau \end{cases}$$

Il filo percorso da corrente produce il campo magnetico di Biot Savard  $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\phi}$ . Il flusso di questo campo magnetico concatenato con una singola spira dell'avvolgimento toroidale vale

$$\Phi_{1\text{spira}}(\vec{B}) = \int_0^{l_z} dz \int_{R_0-l_r/2}^{R_0+l_r/2} dr \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i l_z}{2\pi} \ln \frac{R_0 + l_r/2}{R_0 - l_r/2} \text{ con } l_r = 2 \text{ cm e } l_z = 3 \text{ cm.}$$

1) Quindi il flusso concatenato con l'avvolgimento toroidale è  $\Phi_{\text{toro}}(\vec{B}) = N \frac{\mu_0 i l_z}{2\pi} \ln \frac{21}{19} =$

$$10^5 \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 0.02}{2\pi} \ln \frac{21}{19} = 8 \times 10^{-3} \times 0.1 = 8 \times 10^{-4} \text{ Weber.}$$

Quindi il coefficiente di mutua induzione dei due circuiti è

$$M = \frac{\Phi_{\text{toro}}(\vec{B})}{i} = \frac{N \mu_0 l_z}{2\pi} \ln \frac{R_0 + l_r/2}{R_0 - l_r/2} = 40 \times 10^{-6} \text{ Henry} = 40 \mu\text{Henry.}$$

2) si applica la legge di Faraday Neumann, per cui per cui la f.e.m. indotta sarà diversa da zero solo quando il campo magnetico varia nel tempo ossia quando la corrente nel filo  $i_f$  varia nel tempo, cioè per  $0 < t < 3\tau/4 = 150/4 \text{ s} = 37,5 \text{ s}$ . Quindi per  $0 < t < 37,5 \text{ s}$  la corrente indotta nel toro sarà

$$i_{\text{toro}} = - \frac{1}{R_t} \frac{d\Phi_{\text{toro}}(\vec{B})}{dt} = - \frac{M}{R_t} \frac{di}{dt} = - \frac{40 \mu\text{Henry}}{20 \Omega} \left( -I_0 \frac{2\pi}{\tau} \sin \frac{2\pi}{\tau} t \right) =$$

$$= \frac{2 \times 10^{-6} \times 10 \times 2\pi}{50} \sin\left(2\pi t/\tau\right) = 2.5 \mu\text{A} \sin(2\pi t/\tau).$$

**Quesito 2 (fino a 12 punti)**

Un rivelatore di particelle è costituito da un tubo cilindrico della lunghezza  $L$  di 50 cm, con una sottile parete metallica di raggio interno  $r_c$  pari a 2,5 cm e basi in materiale isolante, riempito di un opportuna miscela di gas. Sull'asse del cilindro è collocato un filo metallico del diametro di 50  $\mu\text{m}$  teso tra il centro delle due pareti di base. Il filo si trova a un potenziale elettrostatico di 2000 V rispetto alla parete esterna che è a potenziale nullo.

Nell'ipotesi che lo spazio riempito di gas possa essere considerato vuoto, si determini:

- 1) il valore del campo elettrico in prossimità della parete catodica e la densità superficiale di carica sul filo anodico;
- 2) l'intensità della forza a cui è soggetto un elettrone all'interno del rivelatore alla distanza di 1 cm dall'asse del tubo.
- 3) l'energia immagazzinata nel sistema.
- 4) la capacità del condensatore cilindrico rappresentato dai due conduttori.

Il cilindro con filo sull'asse rappresenta un condensatore. Nello spazio tra i due conduttori il campo elettrico sarà radiale uscente (cioè diretto come il versore  $\hat{r}$  di un sistema di coordinate cilindriche con origine a metà della lunghezza del filo e asse  $z$  coincidente con l'asse del filo). Radiale per simmetria cilindrica del sistema, uscente perché una carica di prova positiva si sposta verso regioni a potenziale più basso, quindi in questo caso dal filo verso la parete esterna. Sulla superficie del filo sarà distribuita uniformemente una carica complessiva uguale e opposta a quella distribuita sulla superficie interna della parete metallica. Le densità superficiali sono perciò legate dalla relazione:  $Q_i = 2\pi r_i \sigma_i L = -2\pi r_e \sigma_e L = -Q_e$ . In un punto interno al tubo il campo elettrico è determinato esclusivamente dalla carica elettrica distribuita sul filo e dipende (per simmetria) solo dalla distanza  $r$  dall'asse. Applicando Gauss a una superficie cilindrica coassiale al sistema e di raggio  $r$  con  $r_i < r < r_e$ , si trova  $2\pi r h E(r) = \sigma_i 2\pi r_i h / \epsilon_0$  e pertanto

$$\vec{E}(r) = \sigma_i r_i / (\epsilon_0 r) \hat{r} = 4\pi k \sigma_i r_i \hat{r} / r \text{ e la differenza di potenziale tra parete catodica e filo anodico è } \Delta V = \phi(r_i) - \phi(r_e) = \frac{\sigma_i r_i}{\epsilon_0} \int_{r_i}^{r_e} \frac{\hat{r}}{r} \cdot d\vec{r} = 4\pi k \sigma_i r_i \ln \frac{r_e}{r_i}$$

$$\text{quindi } 4\pi k \sigma_i r_i = \frac{2000 \text{ V}}{\ln(25/0.025)} = 290 \text{ V.}$$

$$\text{Quindi il campo elettrico può essere scritto come } \vec{E}(r) = \frac{\Delta V}{\ln(r_e/r_i)} \frac{1}{r} \hat{r} = \frac{290}{r} \text{ V/m } \hat{r}$$

Il campo elettrico in prossimità del filo anodo è quindi  $\vec{E}(r \rightarrow r_i) = 11.6 \text{ MV/m } \hat{r}$ , mentre

- 1) Il campo elettrico in prossimità della parete catodica  $\vec{E}(r \rightarrow r_e) = 11.6 \text{ kV/m } \hat{r}$ ; La densità superficiale di carica sulla superficie interna  $\sigma_i = 11.6 \text{ MV/m} \times \epsilon_0 = 102 \text{ } \mu\text{C/m}^2$ .
- 2) La densità superficiale di carica sulla parete catodica interna è invece

$$\sigma_e = -\sigma_i \frac{r_i}{r_e} = -120 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 \times 0.625 \times 10^{-3} = -102 \text{ nC/m}^2.$$

- 3) La forza su un elettrone che si trovi a 5 mm dall'asse del condensatore è  $\vec{F} = -e \vec{E}(r = 5 \text{ mm}) = -e \frac{290}{0.01} \hat{r} = -4.64 \times 10^{-15} \text{ N}$ . Si tratta di una forza attrattiva (l'elettrone è attratto dal'anodo).

- 4) La densità volumetrica di energia associata al campo elettrico è  $\frac{dU_e}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2$ . Quindi l'energia immagazzinata nel sistema è l'integrale di questa densità sul volume dello spazio tra i due conduttori:  $U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r_i}^{r_e} 2\pi L r dr E^2(r) = \pi \epsilon_0 L \int_{r_i}^{r_e} (\sigma_i r_i / \epsilon_0 r)^2 r dr = 4\pi^2 k L \sigma_i^2 r_i^2 \ln \frac{r_e}{r_i}$ .

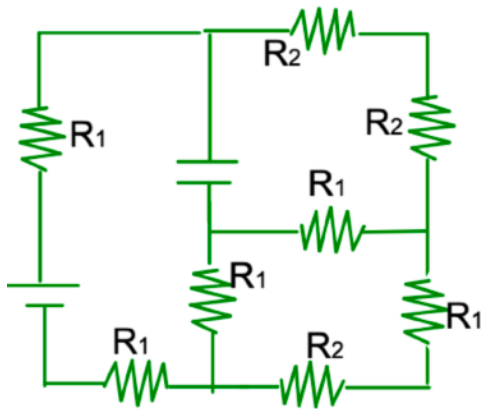
- 5) La capacità del condensatore cilindrico è per definizione  $C = \frac{\Delta Q_{f \rightarrow c}}{\phi(r_i) - \phi(r_e)}$  dove  $\Delta Q_{f \rightarrow c}$  è la carica che bisogna spostare dal filo al catodo per annullare la differenza di potenziale. Dal momento che

$\Delta V = \phi(r_i) - \phi(r_e) = 4\pi k \sigma_i r_i \ln \frac{r_e}{r_i}$  occorre spostare tutta la carica che si trova sul filo, cioè

$Q_f = 2\pi r_i L \sigma_i$ , sul catodo.

$$\text{Quindi } C = \frac{2\pi r_i L \sigma_i}{4\pi k \sigma_i r_i \ln \frac{r_e}{r_i}} = C = \frac{L}{2k \ln \frac{r_e}{r_i}} = \frac{0.5}{2 \times 9 \times 10^9 \times 6.9} = 4 \text{ pF.}$$

D'altra parte l'energia del condensatore e'  $U_e = \frac{1}{2} Q_f \Delta V = \pi r_i L \sigma_i \Delta V = 4\pi^2 k L \sigma_i^2 r_i^2 \ln \frac{r_e}{r_i}$  che e' la stessa espressione ottenuta in precedenza (risposta 4) integrando la densità volumetrica di energia. Il valore della energia è quindi  $U_e = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = 0.5 \times 4 \text{ pF} \times 2000^2 \text{ J} = 8 \text{ } \mu\text{J}.$

**Quesito 3 (fino a 12 punti)**

Calcolare le correnti a regime in tutti i rami del circuito in figura e la carica sulle armature del condensatore. Si utilizzino i parametri circuitali seguenti:

$$\epsilon = 10 \text{ V}, R_1 = 500 \Omega, R_2 = 200 \Omega, C = 100 \text{ pF}.$$

Si valuti l'energia immagazzinata nel condensatore.

Infine, si discuta l'andamento della carica sulle armature del condensatore in funzione del tempo a partire da un istante di tempo, che assumiamo come zero, in cui il ramo del generatore è interrotto.

Quale frazione dell'energia immagazzinata energia è dissipata sul resistore collegato in serie al condensatore ?

Il circuito in una prima **fase**

**di carica** il condensatore e, **a regime**, non permette la circolazione di corrente nel suo ramo (quindi neppure nella resistenza  $R_2$  che è in serie al condensatore). In questo regime nel circuito ci sono 3 correnti fisiche distinte  $i_g$ ,  $i_1$ , e  $i_2$ . La differenza di potenziale tra le armature del condensatore e' pari alla differenza di potenziale tra i punti A e B del circuito:

$$\Delta V_C = \varphi(A) - \varphi(B) = \epsilon - 2i_g R_1 - i_2 R_1.$$

Le equazioni che governano le correnti del circuito sono

$$\begin{cases} i_g = i_1 + i_2 & \text{eq. ai nodi} \\ 2i_2 R_1 = i_1 (R_1 + R_2) & \text{maglia a dex senza generatore} \\ i_g = \epsilon / R_{eq} & \text{tutto il circuito} \end{cases}$$

$$\text{dove } R_{eq} = 2R_1 + 2R_2 + \frac{2R_1(R_1 + R_2)}{3R_1 + R_2} = 1400 + 700 \times 1000 / 1700 = 1810 \Omega.$$

Pertanto

$$i_g = \epsilon / R_{eq} = 10 \text{ V} / 1810 \Omega = 5,52 \text{ mA}.$$

Dalla seconda eq abbiamo  $i_1 = i_2 \times \frac{1000}{700} = 1,43 i_2$ . Pertanto, sostituendo nella prima eq. si ha

$$i_2 = i_g / 2,43 = 2,27 \text{ mA} \text{ e } i_1 = 3,25 \text{ mA}.$$

$$\text{Quindi } \Delta V_C = \epsilon - 2i_g R_1 - i_2 R_1 = 10 - 5,52 - 2,27/2 = 3,35 \text{ V}.$$

L'energia immagazzinata nel condensatore e'

$$U_e = \frac{1}{2} C (\Delta V_C)^2 = 0,5 \times 10^{-10} \text{ F} \times 3,35^2 \text{ V}^2 = 0,56 \text{ nJ}.$$

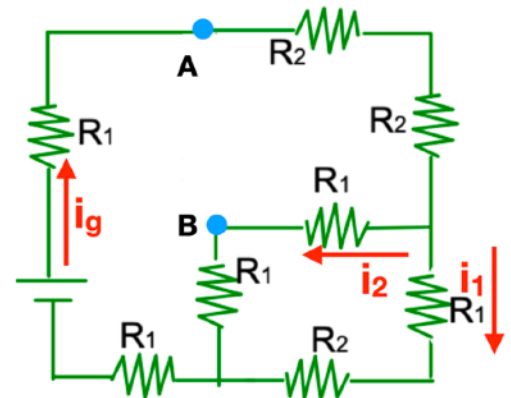
Nella **fase di scarica** questa energia e' dissipata per effetto Joule nei resistori attraversati dalle correnti che circolano neutralizzando la carica sulle armature del condensatore e annullando la differenza di potenziale tra di esse. La resistenza eq. su cui si scarica il condensatore e'

$$R'_{eq} = 2R_2 + \frac{R_1(R_1 + R_2 + R_1)}{3R_1 + R_2} = 753 \Omega.$$

Il tempo caratteristico di scarica e'

$$\tau = R'_{eq} C = 753 \times 10^{-10} = 75,3 \text{ ns} \text{ e l'andamento del tempo della carica sulle armature del condensatore e' } Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \text{ con}$$

$$Q_0 = C \Delta V_C = 10^{-10} \text{ F} \times 3,35 \text{ V} = 335 \text{ pC}.$$



**FASE DI CARICA A REGIME**

Nella **fase di scarica** Il condensatore e' in serie con due resistori  $R_2$ . Su questi sarà dissipata l'energia  $E_J^{2R_2} = \int_0^\infty dt (2R_2) i_c^2(t)$  dove la corrente  $i_c(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ . Dal momento che

$$\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = i_c(t) R'_{eq} \text{ la corrente all'istante di tempo iniziale risulta}$$

$$i_0 = i_c(0) = \frac{Q(0)}{R'_{eq} C} = \frac{Q_0}{R'_{eq} C}.$$

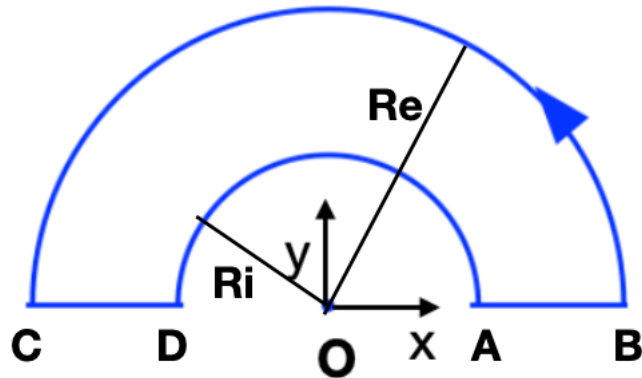
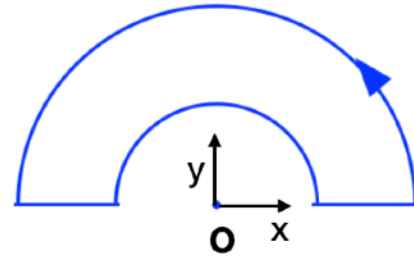
$$\text{Pertanto } E_J^{2R_2} = 2R_2 \left( \frac{Q_0}{R'_{eq} C} \right)^2 \int_0^\infty dt e^{-2t/R'_{eq} C} = 2R_2 \frac{Q_0^2}{2R'_{eq} C} =$$

$$0.335^2 \times 10^{-18} \frac{200}{753 \times 10^{-10}} = 0.3 \text{ nJ}$$

La frazione di energia immagazzinata nel condensatore che e' dissipata sui due resistori in serie ad esso e'  $f = 0.3 \text{ nJ} / 0.56 \text{ nJ} = 0.53$ .

**Quesito 4 (fino a 8 punti)**

Il circuito in figura e' percorso da una corrente di 10 A nel verso indicato. Si calcoli il campo magnetico nel centro O delle due semicirconferenze, assumendo che il raggio interno sia pari a 20 cm e il raggio esterno a 50 cm. Chiamato x l'asse orizzontale e y l'asse verticale con origine in O si valuti l'energia potenziale di un dipolo magnetico  $\vec{m} = m_0 \hat{u}$  collocato in O, quando  $\hat{u} = -\hat{x}$  e quando  $\hat{u} = \hat{z}$ .



Calcoliamo il campo magnetico nel punto O applicando la formula di Laplace al circuito, che chiamo  $\gamma$ ,

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\gamma} \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_O)}{|\vec{r} - \vec{r}_O|^3} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^B \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_O)}{|\vec{r} - \vec{r}_O|^3} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_B^C \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_O)}{|\vec{r} - \vec{r}_O|^3} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_C^D \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_O)}{|\vec{r} - \vec{r}_O|^3} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_D^A \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_O)}{|\vec{r} - \vec{r}_O|^3} \\ &= (\text{tratto lungo l'asse } x \text{ A} \rightarrow \text{B}) \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^B \frac{dx \hat{x} \wedge (-x \hat{x})}{|x|^3} + \\ &+ (\text{tratto lungo l'arco } B \rightarrow C) \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_B^C \frac{dl \hat{\phi} \wedge (-R_e \hat{r})}{R_e^3} + \\ &+ (\text{tratto lungo l'asse } x \text{ B} \rightarrow \text{D}) \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^B \frac{dx \hat{x} \wedge (-x \hat{x})}{|x|^3} + \\ &+ (\text{tratto lungo l'arco } D \rightarrow A) \left( -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_A^D \frac{dl \hat{\phi} \wedge (-R_i \hat{r})}{R_i^3} \right). \end{aligned}$$

I tratti orizzontali danno contributo nullo perche' i tratti di linea del circuito sono paralleli al vettore che congiunge il tratto di linea con il punto O.

Gli archi danno contributi non nulli, Quindi, tenendo presente che  $\hat{\phi} \wedge (-\hat{r}) = \hat{z}$ , e che il tratto di linea si puo' esprimere come segue  $d\vec{l} = R_{e/i} d\phi \hat{\phi}$  si ha

$$\begin{aligned} \vec{B}(O) &= \frac{\mu_0 i \hat{z}}{4\pi R_e} \int_0^\pi d\phi - \frac{\mu_0 i \hat{z}}{4\pi R_i} \int_0^\pi d\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi R_e R_i} (R_i - R_e) \hat{z} = \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{4 \times 0.2 \times 0.5} (0.2 - 0.5) \hat{z} = -9,42 \mu\text{T} \hat{z}. \end{aligned}$$

Si tratta quindi di un campo che ha una componente negativa lungo l'asse z.

L'energia potenziale di un dipolo magnetico immerso in un campo magnetico e'  $U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ .

Se  $\vec{m} = m_0 \hat{u}$  e' collocato in O, quando  $\hat{u} = -\hat{x}$  l'energia potenziale e' nulla perche' il dipolo e il campo sono perpendicolari l'uno all'altro. Quando invece  $\hat{u} = \hat{z}$  allora il momento di dipolo e il

campo sono paralleli e l'energia potenziale e'  $U_p = \frac{m\mu_0 i \pi}{4\pi R_e R_i} (R_e - R_i) > 0$ . Si tratta di una

condizione di equilibrio instabile.

**Quesito 5 (fino a 8 punti)**

Si discuta uno degli argomenti elencati:

- 1) l'interazione tra due dipoli paralleli o anti-paralleli l'uno all'altro collocati sullo stesso asse e allineati ad esso;
- 2) il modello di conduzione di Drude;
- 3) calcolo del coefficiente di autoinduzione di un solenoide;
- 4) comportamento di un conduttore con una cavità rispetto a una carica puntiforme collocata all'esterno del conduttore e all'interno della cavità.

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m},$$

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$$

$$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{Kg}, m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{Kg}, M_{\text{He}} \approx 4 m_p$$

Campo  $\vec{E}$  e potenziale  $\varphi$  prodotti da una carica puntiforme:  $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2} \hat{r}; \quad \varphi(r) = k \frac{q}{r}$

Campo  $\vec{E}$  e potenziale  $\varphi$  di dipolo:  $\vec{E}(r,\vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}; \quad \varphi(r,\vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo  $\vec{B}$  prodotto da un dipolo magnetico:  $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5};$

Formule di Laplace:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$