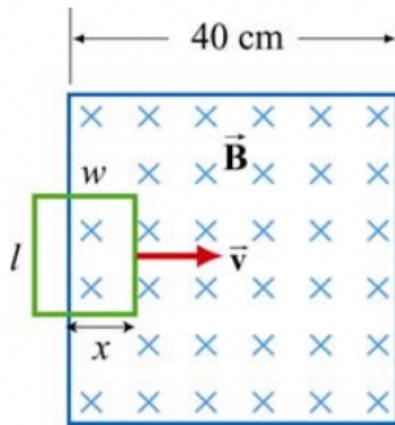


## Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 80 - a.a. 2025-2026

### Quesito 1



Una spira rettangolare, di resistenza  $R=30\ \Omega$  e di lati  $l=12\text{ cm}$  e  $w=10\text{ cm}$ , trasla a velocità costante  $\vec{v}_0 = 5\text{ cm/s} \hat{x}$  per effetto di forze esterne entrando in una regione, di estensione pari a  $40\text{ cm}$  nella direzione  $x$ , in cui c'è un campo magnetico diretto perpendicolarmente al piano della figura e entrante di modulo  $B_0 = 0.5\text{ T}$ . Si calcoli e si faccia un grafico in funzione del tempo di

- 1) flusso del campo  $B$  concatenato con la spira;
- 2) forza elettromotrice indotta nella spira quadrata;
- 3) forza magnetica che agisce sulla spira e che occorre bilanciare per mantenere la velocità costante.

Cosa accadrebbe se non ci fosse nessuna forza esterna applicata e  $\vec{v}$  fosse solo la velocità iniziale nell'istante di tempo in cui la spira inizia a entrare nel campo magnetico?

La spira si muove di moto rettilineo uniforme; l'equazione del suo lato verticale (perpendicolare all'asse  $x$ ) destro è  $x(t) = v_0 t$ , chiamato  $x=0$  l'inizio della regione in cui c'è campo magnetico e  $t=0$  l'istante di tempo in cui la spira comincia ad entrare nel campo magnetico.

1) Orientata la spira rettangolare in senso orario, **Il flusso del campo attraverso una qualunque superficie che ha come bordo la spira orientata, in funzione del tempo, sarà**

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \begin{cases} 0 & t < t_0 = 0 \\ v_0 t l B_0 & t_0 < t < t_1 = w/v_0 \\ w l B_0 & t_1 < t < t_2 = L/v_0 \\ w l B_0 - v_0(t - t_2) l B_0 & t_2 < t < t_3 = (L + w)/v_0 \\ 0 & t_3 < t \end{cases}$$

Si osservi che occorre distinguere cinque intervalli di tempo:  $t < t_0$  prima che la spira entri nel campo magnetico; tra  $t_0 < t < t_1$  la spira sta entrando nel campo magnetico ma è ancora parzialmente fuori; per  $t_1 < t < t_2$  la spira è completamente immersa nel campo magnetico; quando  $t_2 < t < t_3$  la spira sta uscendo dal campo magnetico, ma è ancora parzialmente all'interno del campo, infine per  $t > t_3$  la spira è completamente fuori dal campo magnetico.

2) **Per la legge di Faraday Neumann, la forza elettromotrice indotta sulla spira è**

$$\epsilon_i = - \frac{d\Phi_{\Sigma}(\vec{B})}{dt} = \begin{cases} 0 & t < t_0 = 0 \\ -v_0 l B_0 & t_0 < t < t_1 = w/v_0 \\ 0 & t_1 < t < t_2 = L/v_0 \\ v_0 l B_0 & t_2 < t < t_3 = (L + w)/v_0 \\ 0 & t_3 < t \end{cases} . \text{ Essa risulta negativa, cioè diretta in}$$

senso opposto al verso in cui è orientata la spira, quindi diretta in senso antiorario quando la spira entra nel campo magnetico, diretta in senso orario quando esce. Questa determina una corrente indotta di intensità pari alla forza elettromotrice divisa per la resistenza della spira,  $i_i = |\epsilon_i|/R$ , che circola in senso antiorario quando la spira entra e in senso orario quando la spira esce.

3) **Quando la spira è percorsa dalla corrente indotta, i lati (o le porzioni di lato) immersi nel campo magnetico sono soggetti a forze.** In particolare ogni tratto infinitesimo  $d\vec{l}$  è soggetto alla forza infinitesima  $d\vec{F} = i_i d\vec{l} \wedge \vec{B}$ . Quindi, per  $t_0 < t < t_1$ , un tratto orizzontale sul lato in alto è

soggetto alla forza  $d\vec{F} = i_i dl(-\hat{x}) \wedge \vec{B} = i_i dl(-\hat{x}) \wedge B_0(-\hat{z}) = -i_i dl B_0 \hat{y}$ . Complessivamente, il lato orizzontale in alto sarà soggetto alla forza  $\vec{F}_{up} = -i_i x(t) B_0 \hat{y}$ . Il lato orizzontale in basso, dal momento che ogni tratto di linea è esprimibile come  $d\vec{l} = i_i dl \hat{x}$  quindi opposto ai tratti di linea sul lato in alto, sarà soggetto alla forza  $\vec{F}_{down} = i_i x(t) B_0 \hat{y}$ . Pertanto la forza complessiva sulla spira sarà uguale alla forza sul lato verticale destro  $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{up} + \vec{F}_{down} + \vec{F}_{right} = \vec{F}_{right}$

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{right} = - \int_0^l i_i dy \hat{y} \wedge B_0 \hat{z} = -i_i l B_0 \hat{x}.$$

Per  $t_2 < t < t_3$ , quando la spira uscendo dalla regione di campo magnetico è parzialmente fuori, la corrente scorre nel verso orario, quindi i tratti di linea sui lati in basso, a sinistra e in alto rispettivamente sono:  $d\vec{l}_{down} = -i_i dl \hat{x}$ ,  $d\vec{l}_{left} = i_i dl \hat{y}$ , e  $d\vec{l}_{up} = i_i dl \hat{x}$ , quindi come prima sui lati in alto e in basso si eserciteranno forze uguali e opposte e la forza risultante sarà dovuta solo

$$\text{al lato verticale a sinistra e risulterà uguale a } \vec{F}_{tot} = \vec{F}_{left} = - \int_0^l i_i dy \hat{y} \wedge B_0 \hat{z} = -i_i l B_0 \hat{x}.$$

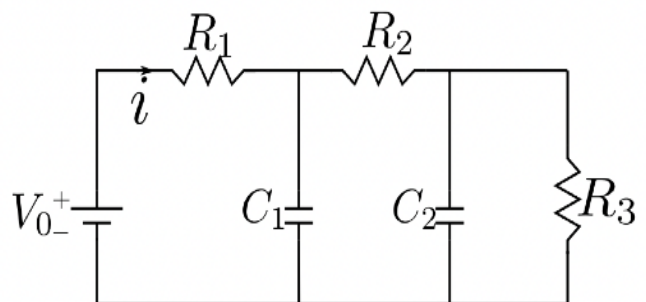
Sia quando la spira entra che quando esce dalla regione di campo magnetico la forza è  $\vec{F}_{tot} = -i_i l B_0 \hat{x} = -v_0 l^2 B_0^2 \hat{x}$ . Come indicato dal segno tende ad opporsi al moto della spira che è responsabile del cambiamento di flusso del campo magnetico concatenato con la spira stessa. Quindi affinché la velocità si mantenga costante, come nelle ipotesi del problema, qualche altra forza esterna dovrà compensarla.

**4) Se la spira non fosse soggetta ad una forza esterna** che ne mantiene la velocità costante, la f.e.m. indotta e quindi la corrente indotta sarebbero funzioni del tempo, così come la forza che il campo magnetico determina sulla spira quando è percorsa dalla corrente indotta. Dal momento che questa forza, sia in entrata che in uscita, è diretta in verso opposto alla direzione del moto essa determina in entrambi i casi un rallentamento della spira. Si può dimostrare che la variazione di energia cinetica corrisponde all'energia dissipata per effetto Joule dalla circolazione della corrente nel metallo della spira.

### Quesito 2

Il circuito elettrico in figura è costituito da tre resistenze,  $R_1 = 500 \, \Omega$ ,  $R_2 = 800 \, \Omega$ ,  $R_3 = 200 \, \Omega$  e due condensatori  $C_1 = 200 \, \text{nF}$  e  $C_2 = 0.5 \, \mu\text{F}$ , collegati ad un generatore con differenza di potenziale  $V_0 = 10 \, \text{V}$ .

Calcolare in condizioni stazionarie la potenza erogata dal generatore e l'energia elettrostatica  $U_1$  e  $U_2$  accumulata in ciascuno dei due condensatori. Supponendo che, ad un dato istante, la resistenza  $R_3$  venga scollegata dal circuito, si valuti la carica accumulata sulle armature dei due condensatori dopo un tempo sufficientemente lungo affinché sia raggiunta la nuova condizione stazionaria



Nel circuito, con un generatore di f.e.m. costante e due condensatori, i vari rami saranno attraversati da correnti variabili nel tempo che si porteranno a valori stazionari a regime, ossia dopo tempi (tipicamente molto brevi) caratteristici dei processi di carica dei condensatori. A regime, i rami in cui compaiono i condensatori non saranno attraversati da corrente, come se contenessero un interruttore aperto. Quindi a regime il circuito equivale ad un'unica maglia in cui le resistenze  $R_1$ ,  $2$  e  $3$  sono in serie. L'unica corrente che attraversa il generatore e i tre resistori è  $I_{regime} = \epsilon / (R_1 + R_2 + R_3) = 10/1500 \, \text{A} = 6.67 \, \text{mA}$ . La potenza erogata dal generatore in queste condizioni è  $P_{erogata} = \epsilon I_{regime} = 66.7 \, \text{mW}$ . L'energia accumulata in ciascun

condensatore e' pari a  $U_{1,2} = \frac{1}{2} C_{1,2} (\Delta V_{1,2})^2$ . Occorre quindi calcolare le differenze di potenziale ai capi dei due condensatori:  $\Delta V_1 = I_{regime} (R_3 + R_2) = 6.67 \text{ V}$ , mentre  $\Delta V_2 = I_{regime} R_3 = 1.33 \text{ V}$ . Pertanto

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V_1)^2 = 0.5 \cdot 200 \times 10^{-9} \cdot 6.67^2 = 4.45 \text{ } \mu\text{J e}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 (\Delta V_2)^2 = 0.5 \cdot 500 \times 10^{-9} \cdot 1.33^2 = 0.442 \text{ } \mu\text{J}.$$

Quando il resistore  $R_3$  viene scollegato, stabilite le nuove condizioni di equilibrio, nel circuito non c'è nessuna maglia chiusa e nessuna corrente può scorrere. Il generatore quindi mantiene una differenza di potenziale  $\epsilon$  tra i conduttori collegati al suo polo positivo (tra cui entrambe le armature in alto dei due condensatori) e i conduttori collegati al suo polo negativo (tra cui entrambe le armature in basso dei due condensatori). Quindi  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \epsilon$  e le cariche sulle armature dei due condensatori sono  $Q_1 = C_1 \epsilon = 2 \text{ } \mu\text{C}$  e  $Q_2 = C_2 \epsilon = 5 \text{ } \mu\text{C}$ .

### Quesito 3

Una distribuzione di carica cilindrica con densità uniforme  $\rho = 5 \text{ } \mu\text{C/m}^3$  di raggio pari a 5 cm e lunghezza molto grande è circondata per tutta la lunghezza da una guaina sottile cilindrica coassiale con raggio interno ed esterno pari rispettivamente a  $R_i = 7.5 \text{ cm}$  e  $R_e = 8.0 \text{ cm}$  di materiale conduttore elettricamente neutra. Si stabilisca qual è la differenza di potenziale tra la superficie esterna della distribuzione di carica e la guaina conduttrice e si calcoli il campo elettrico in ogni punto dello spazio, all'interno e all'esterno della distribuzione.

La distribuzione di carica e di conduttori presenta simmetria cilindrica. Quindi le grandezze fisiche dipenderanno solo dalla distanza  $r$  dall'asse di simmetria che corrisponde con l'asse della distribuzione di carica e adottiamo come asse  $z$ . Le superfici equipotenziali saranno superfici cilindriche coassiali al sistema e pertanto il campo elettrico sarà diretto come  $\hat{r}$  il versore dei piani  $xy$  radiale uscente rispetto all'asse di simmetria.

La guaina conduttrice è equipotenziale e al suo interno il campo elettrico è nullo. Sulla sua superficie interna per induzione ci sarà una densità di carica superficiale  $\sigma_i$  tale che, considerata una superficie chiusa cilindrica coassiale di altezza arbitraria  $dz$  e raggio  $R_i < r < R_e$ , la cui superficie laterale è interna al conduttore della guaina dove il campo è nullo, per la legge di Gauss dato che il flusso del campo elettrico è pari a zero, la carica totale all'interno della superficie cilindrica deve essere nulla, quindi  $\rho \pi R^2 dz = -\sigma_i 2\pi R_i dz$  e allora  $\sigma_i = -\frac{\rho R^2}{2R_i}$ . D'altra parte per la neutralità della guaina sulla superficie esterna ci sarà una distribuzione di carica superficiale di densità uniforme tal che  $\sigma_e 2\pi R_e dz = -\sigma_i 2\pi R_i dz$ , quindi  $\sigma_e = \frac{\rho R^2}{2R_e}$ .

Per calcolare il campo elettrico in un punto a distanza  $r$  generica dall'asse  $z$ , applichiamo la legge di Gauss a una superficie chiusa cilindrica  $\Sigma_C$  di raggio pari proprio a  $r$  e altezza arbitraria che chiamiamo  $h$ . Il flusso del campo elettrico attraverso  $\Sigma_C$  e sarà uguale alla quantità di carica contenuta all'interno di  $\Sigma_C$  divisa per la costante dielettrica del vuoto. Quindi,

$$\Phi_{\Sigma_C}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}(\Sigma_C)}{\epsilon_0} = \begin{cases} \rho \pi r^2 h / \epsilon_0 & r < R \\ \rho \pi R^2 h / \epsilon_0 & R < r < R_i \\ \rho \pi R^2 h / \epsilon_0 & R_e < r \end{cases}$$

D'altra parte il flusso del campo elettrico attraverso  $\Sigma_C$ ,  $\Phi_{\Sigma_C} = \int_{\Sigma_C} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ , risulta uguale al flusso attraverso la sola superficie laterale, perché sulle basi gli elementi di superficie  $d\vec{s} = \pm ds \hat{z}$  sono perpendicolari al campo elettrico  $\vec{E} = E(r) \hat{r}$ .

Il flusso risulta quindi  $\Phi_{\Sigma_C} = E(r)2\pi rh$ . Pertanto eguagliando con l'espressione della carica interna si ha

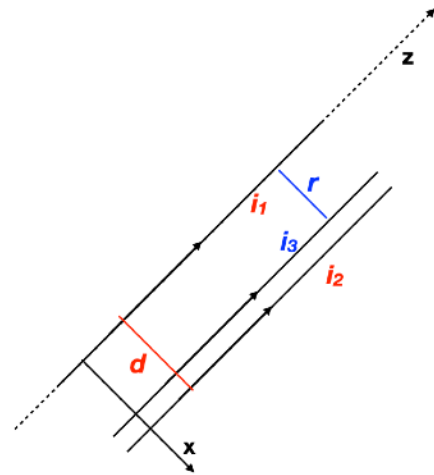
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho\pi r^2 h}{2\pi rh} \hat{r} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} & r < R \\ \frac{\rho\pi R^2 h}{2\pi rh\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r} & R < r < R_i \\ 0 & R_i < r < R_e \\ \frac{\rho\pi R^2 h}{2\pi rh\epsilon_0} \hat{r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r} & R_e < r \end{cases}$$

La ddp tra  $r=R$  e  $r=R_i$  è, secondo la definizione,

$$\begin{aligned} \varphi(R) - \varphi(R_i) &= \int_R^{R_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{R_i} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R_i}{R} = \\ &= 5 \times 10^{-6} \cdot 0.05^2 \cdot 2\pi \cdot 9 \times 10^{-9} \ln 1.5 = 287 \text{ V.} \end{aligned}$$

#### Quesito 4

Si considerino due fili conduttori, di grande lunghezza, rettilinei paralleli l'uno all'altro, distanti  $d=20 \text{ cm}$ , e percorsi nello stesso verso dalle correnti  $i_1 = 2 \text{ A}$  e  $i_2 = 4 \text{ A}$  rispettivamente. Un terzo filo parallelo ai precedenti giace nel piano che contiene i due fili ed è a sua volta percorso dalla corrente  $i_3 = 1 \text{ A}$  concorde a quella nei due fili. Si determini la posizione di equilibrio per il terzo filo (espresso in termini della distanza  $x$  dal primo filo). Si calcoli, inoltre, modulo, direzione e verso della forza  $\Delta \vec{F}$  per unità di lunghezza che agisce sul terzo filo quando si trova alla stessa distanza dagli altri due fili.



Su ogni tratto  $d\vec{z}\hat{z}$  del filo 3 percorso dalla corrente  $i_3$

agisce una forza  $d\vec{F} = i_3 d\vec{z}\hat{z} \wedge (\vec{B}_1(r_1) + \vec{B}_2(r_2))$  dove  $r_1$  e  $r_2$  sono le distanze del filo 3 dal filo 1 e 2 rispettivamente. Trovare la posizione di equilibrio per il filo tre significa trovare (se esiste) la posizione nel piano (la distanza  $r$  dal filo 1 e il lato) in cui il campo complessivo è nullo.

Le correnti nei fili 1 e 2 producono rispettivamente i campi  $\vec{B}_{1,2} = \frac{\mu_0 i_{1,2}}{2\pi r_{1,2}} \hat{\phi}_{1,2}$ . Definito l'asse  $x$

sul piano come in figura, occorre distinguere i casi in cui il filo 3 si trova a  $x < 0$ , a  $0 < x < d$  e infine a  $x > d$ .

Per  $x < 0$ ,  $\hat{\phi}_1 = -\hat{y}$  e  $\hat{\phi}_2 = -\hat{y}$ , quindi i campi prodotti dai due fili sono paralleli l'uno all'altro e la loro somma non potrà essere nulla.

Per  $x > d$ ,  $\hat{\phi}_1 = \hat{y}$  e  $\hat{\phi}_2 = \hat{y}$ , quindi come prima il campo non potrà essere nullo.

Per  $0 < x < d$ ,  $\hat{\phi}_1 = \hat{y}$  e  $\hat{\phi}_2 = -\hat{y}$ , quindi è possibile ricercare una condizione di campo nullo.

$$\text{Allora per } 0 < x < d, \vec{B}_{tot} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \hat{y} - \frac{\mu_0 i_2}{2\pi (d-r)} \hat{y} = \frac{\mu_0 \hat{y}}{2\pi} \left( \frac{i_1}{r} - \frac{i_2}{d-r} \right).$$

Quindi  $i_1(d-r) = i_2 r$  garantisce la condizione di campo nullo e quindi forza nulla sul filo 3:

$$r = \frac{i_1 d}{i_1 + i_2} = 6.67 \text{ cm.}$$

Quando  $r = d/2$  il campo magnetico totale sul filo vale

$$\vec{B}_{tot}(r = d/2) = \frac{\mu_0 i_1}{\pi d} \hat{y} - \frac{\mu_0 i_2}{\pi d} \hat{y} = \frac{\mu_0 \hat{y}}{\pi d} (i_1 - i_2) = \frac{4\pi 10^{-7}}{\pi 0.2} (2 - 4) \hat{y} = -4 \mu\text{T} \hat{y} \text{ e la forza}$$

per unita' di lunghezza sul filo 3 vale  $\frac{d\vec{F}}{dz} = i_3 \hat{z} \wedge (-4 \times 10^{-6}) \hat{y} = 4 \mu\text{N/m} \hat{x}$ . Si tratta di una forza attrattiva verso il filo 2.

### Quesito 5

Si affronti **solo uno** degli argomenti elencati:

- 1) Illustrare il metodo delle cariche immagine e l'applicazione ad un caso specifico.
- 2) Si discutano le proprietà del **campo elettrico prodotto da una carica puntiforme in moto rettilineo uniforme**
- 3) Le proprietà della carica elettrica.
- 4) Si dimostri la forma differenziale della legge di Ampere a partire dalla formulazione integrale e si discutano i limiti matematici e fisici di questa legge.

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m},$$

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$$

$$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{Kg}, m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{Kg}, M_{\text{He}} \approx 4 m_p$$

Campo  $\vec{E}$  e potenziale  $\varphi$  prodotti da una carica puntiforme:  $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2} \hat{r}; \quad \varphi(r) = k \frac{q}{r}$

Campo  $\vec{E}$  da q puntiforme in moto rettilineo uniforme:  $\vec{E}(r, \vartheta) = \frac{kq(1 - \beta^2)}{r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}} \hat{r};$

Campo  $\vec{E}$  e potenziale  $\varphi$  di dipolo:  $\vec{E}(r, \vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}; \quad \varphi(r, \vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo  $\vec{B}$  prodotto da un dipolo magnetico:  $\vec{B}(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5};$

Formule di Laplace:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$