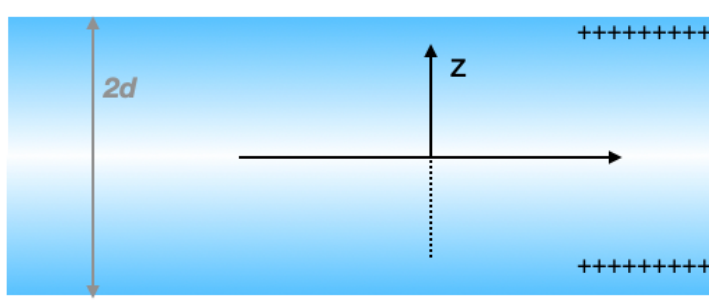


Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 81 - a.a. 2025-2026

Quesito 1 (fino a 12)

Si consideri uno strato planare di materiale isolante di spessore $2d=2\text{cm}$ e area delle facce parallele molto grande. All'interno dello strato è distribuita della carica con densità volumetrica variabile con la profondità z nel mezzo secondo la legge $\rho = \rho_0|z|/d$ [lo zero dell'asse z sia sul piano equidistante dalle due facce di grande area dello strato di materiale]. Se $\rho_0=70\mu\text{C}/\text{m}^3$ si determini il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio ($z < -d$, $-d < z < d$, $z > d$) e si dimostri che vale l'equazione di Poisson.

Si imponga che il potenziale sia nullo a $z=0$.



Quesito 2 (fino a 12 punti)

Un solenoide di lunghezza infinita e' costituito da 10000 spire/m, di raggio $R=20\text{ cm}$ e' percorsa dalla corrente di 50A.

- Si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio e il potenziale vettore A in ogni punto dello spazio (interno ed esterno al solenoide, si faccia un grafico del modulo di A in funzione della distanza dall'asse del solenoide).
- Ad un certo istante di tempo la corrente comincia a diminuire in modo esponenziale con una costante di decadimento $\tau = 5\text{ s}$; si valuti la corrente (verso relativo rispetto alla corrente nelle spire del solenoide e intensità in funzione del tempo) che scorre in un anello conduttore circolare di raggio $r = 2\text{ cm}$ e resistenza di $R_s = 30\ \Omega$ collocato al centro del solenoide e coassiale con esso. Quanta carica attraverserà complessivamente una sezione dell'anello ?

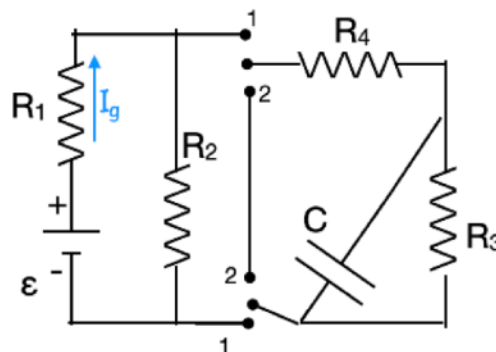
Quesito 3 (fino a 10 punti)

Si definisca un condensatore sferico, in termini dei due parametri geometrici fondamentali R_1 ed R_2 con $R_1 < R_2$. Si calcoli la capacità del condensatore e si dimostri che la sua espressione nel limite in cui $0 < R_2 - R_1 \ll R_1$ è analoga a quella di un condensatore ad armature piano parallele distanti $d=R_2-R_1$ e di superficie pari ad $A=4\pi R_1^2$.

Qual è l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore se le armature si trovano a una differenza di potenziale ΔV ?

Quesito 4 (fino a 10 punti)

Si consideri il circuito in figura che opera da molto tempo con gli interruttori nelle posizioni 1. Si calcoli la potenza dissipata nel resistore R_1 e l'energia accumulata nel condensatore. Ad un certo istante di tempo gli interruttori si spostano nelle posizioni 2 contemporaneamente. Con quale andamento nel tempo si scaricherà il condensatore ? Si consideri: $R_1 = R_4 = 2\text{ k}\Omega$, $R_2 = 3\text{ k}\Omega$, $R_3 = 1.5\text{ k}\Omega$, $\mathcal{E} = 15\text{ V}$, $C = 100\text{ pF}$.



Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si affronti **solo uno** degli argomenti elencati:

- 1) Derivare e discutere l'equazione di Poisson e la sua soluzione generale.
- 2) Si discuta in quali condizioni e con quali modalità la legge di Ampère in forma integrale può essere utilizzata per calcolare il campo magnetico prodotto da un sistema di correnti.
- 3) I coefficienti di mutua induzione: definizione e loro uguaglianza.
- 4) La legge di Lenz: significato, implicazioni energetiche ed esempi.

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m},$$

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$$

$$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{Kg}, m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{Kg}, M_{\text{He}} \approx 4 m_p$$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ prodotti da una carica puntiforme: $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2} \hat{r}; \quad \varphi(r) = k \frac{q}{r}$

Campo $\vec{E}$ da q puntiforme in moto rettilineo uniforme: $\vec{E}(r, \theta) = \frac{kq(1 - \beta^2)}{r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r};$

Campo $\vec{E}$ e potenziale φ di dipolo: $\vec{E}(r, \theta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}; \quad \varphi(r, \theta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5};$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$

OPERATORI DIFFERENZIALI ED ELEMENTI DI LINEA, SUPERFICIE E VOLUME

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} +$ $\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} +$ $\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z}$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \hat{\rho} +$ $\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} +$ $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{r} +$ $\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)\right) \hat{\theta} +$ $\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \hat{\phi}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\rho} +$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{\phi} +$ $(\nabla^2 A_z) \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{r} +$ $\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\theta} +$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{\phi}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz \hat{x} +$ $dx dz \hat{y} +$ $dx dy \hat{z}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} +$ $d\rho dz \hat{\phi} +$ $\rho d\rho d\phi \hat{z}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} +$ $r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} +$ $r dr d\theta \hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

IN COORDINATE CARTESIANE (1A COLONNA DA SINISTRA) CILINDRICHE (2A COLONNA) SFERICHE (3A COLONNA)