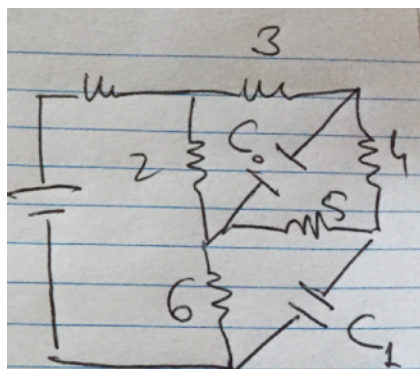
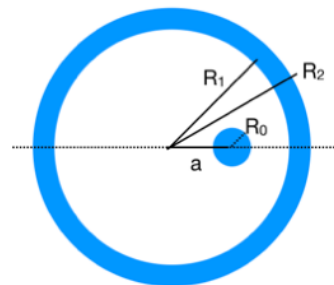


## Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 82 - a.a. 2025-2026

### Quesito 1 (fino a 12)

Una sfera, di raggio  $R_0$ , è uniformemente carica con densità volumetrica  $\rho$ . Il suo centro si trova alla distanza  $a$  dal centro di una sfera cava (raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ ) su cui è distribuita in maniera uniforme la stessa carica contenuta sulla sfera interna. Si calcoli il campo elettrico e il potenziale elettrostatico in ogni punto dell'asse che congiunge i centri delle due sfere (all'esterno del sistema, all'interno della sfera cava, nella cavità e all'interno della sfera interna).

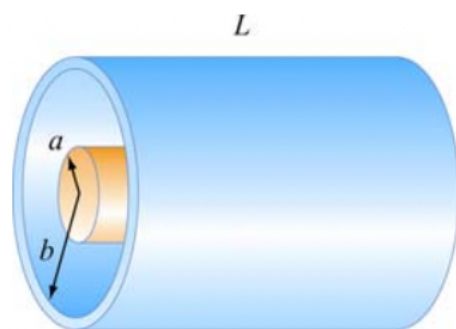
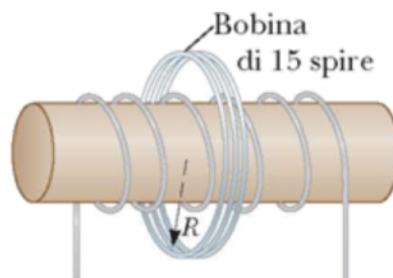


### Quesito 2 (fino a 12 punti)

Si consideri il circuito in figura in cui un generatore di f.e.m. pari a  $\epsilon = 50 \text{ V}$  è in serie con un resistore  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$  e gli altri resistori (da  $R_2$  a  $R_6$ ) hanno tutti il valore di  $500 \Omega$  e sono collegato come illustrato in figura. I due condensatori hanno capacità pari a  $C_0 = 10 \text{ nF}$  e  $C_1 = 2 \text{ nF}$ . Si discuta il comportamento a regime del circuito: il valore delle correnti che attraversano ciascuno dei resistori e la carica sulle armature di entrambi i condensatori.

### Quesito 3 (fino a 10 punti)

Il sistema di due bobine, illustrato in figura, è caratterizzato da  $R_1=30 \text{ cm}$ ,  $N_1=15$ ,  $i_1=2 \cos(t/T_0) \text{ A}$  (con  $T_0=2 \text{ ms}$ ),  $R_2=12 \text{ cm}$ ,  $N_2=10000$ ,  $i_2=0.5 \text{ A}$ ,  $L_2=1 \text{ m}$  (si assuma la lunghezza  $L_1$  trascurabile). Calcolare l'intensità, in funzione del tempo, e il verso (rispetto alla corrente  $i_1$ ) della corrente indotta  $i_2(t)$  nelle spire del solenoide interno, assumendo una resistenza di  $300 \Omega$ .



### Quesito 4 (fino a 10 punti)

In figura è rappresentato un cavo coassiale, ossia un sistema di due conduttori coassiali (il filo interno e la guaina cilindrica esterna) entrambi attraversati dalla stessa corrente  $I=10 \text{ A}$  ma in versi opposti.

1) si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio:  $r < a=0.3 \text{ mm}$ ,  $a < r < b=2 \text{ mm}$ ,  $r > b$  (ossia all'esterno del sistema, si trascuri lo spessore della guaina)

### Quesito 5 (fino a 8 punti)

Si affronti **solo uno** degli argomenti elencati:

- 1) Le equazioni di Maxwell in forma differenziale; discussione, definizione degli operatori differenziali, considerazioni generali.
- 2) Si discuta, con l'aiuto di qualche esempio, in quali condizioni e con quali modalità la legge di Gauss in forma integrale può essere utilizzata per calcolare il campo elettrico prodotto da un sistema di cariche.
- 3) Energia elettrostatica di un sistema discreto di cariche e di un sistema di conduttori.
- 4) Condizioni di continuità o discontinuità del campo elettrico e magnetico nell'attraversamento di strati superficiali di cariche e di correnti.

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m};$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m},$$

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$$

$$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}, m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{Kg}, m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{Kg}, M_{\text{He}} \approx 4 m_p$$

Campo  $\vec{E}$  e potenziale  $\varphi$  prodotti da una carica puntiforme:  $\vec{E}(r) = \frac{kq}{r^2} \hat{r}; \quad \varphi(r) = k\frac{q}{r}$

Campo  $\vec{E}$  da q puntiforme in moto rettilineo uniforme:  $\vec{E}(r, \theta) = \frac{kq(1 - \beta^2)}{r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r};$

Campo  $\vec{E}$  e potenziale  $\varphi$  di dipolo:  $\vec{E}(r, \theta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}; \quad \varphi(r, \theta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo  $\vec{B}$  prodotto da un dipolo magnetico:  $\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5};$

Formule di Laplace:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV; \quad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$

### OPERATORI DIFFERENZIALI ED ELEMENTI DI LINEA, SUPERFICIE E VOLUME

|                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Gradiente</b><br>$\nabla f$                           | $\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$                                                                                                                                                              | $\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$                                                                                                                                                                                                     | $\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Divergenza</b><br>$\nabla \cdot \mathbf{A}$           | $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$                                                                                                                                                                                | $\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$                                                                                                                                                                                                  | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Rotore</b><br>$\nabla \times \mathbf{A}$              | $\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} +$<br>$\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} +$<br>$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z}$ | $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \hat{\rho} +$<br>$\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} +$<br>$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{z}$ | $\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{r} +$<br>$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)\right) \hat{\theta} +$<br>$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \hat{\phi}$                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <b>Laplaciano</b><br>$\nabla^2 f$                        | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$                                                                                                                                                                          | $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$                                                                                                                                                         | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Laplaciano di un vettore</b><br>$\nabla^2 \mathbf{A}$ | $\nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$                                                                                                                                                                                                                 | $\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\rho} +$<br>$\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{\phi} +$<br>$(\nabla^2 A_z) \hat{z}$                                                               | $\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{r} +$<br>$\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\theta} +$<br>$\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{\phi}$ |
| <b>Lunghezza infinitesima</b>                            | $d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$                                                                                                                                                                                                                                 | $d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <b>Aree infinitesime</b>                                 | $d\mathbf{S} = dydz \hat{x} +$<br>$dx dz \hat{y} +$<br>$dx dy \hat{z}$                                                                                                                                                                                                               | $d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} +$<br>$d\rho dz \hat{\phi} +$<br>$\rho d\rho d\phi \hat{z}$                                                                                                                                                                                                                                                    | $d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} +$<br>$r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} +$<br>$r dr d\theta \hat{\phi}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Volume infinitesimo</b>                               | $dv = dx dy dz$                                                                                                                                                                                                                                                                      | $dv = \rho d\rho d\phi dz$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

IN COORDINATE CARTESIANE (1A COLONNA DA SINISTRA) CILINDRICHE (2A COLONNA) SFERICHE (3A COLONNA)