

4

Struttura stellare

Nel Capitolo 1 abbiamo visto come l'osservazione del cielo ci può dare molte informazioni sui parametri macroscopici che caratterizzano le stelle. Abbiamo visto quindi come possiamo valutare luminosità, masse, raggi e temperature superficiali (vedi il paragrafo 1.2.3) e come utilizzare queste grandezze per caratterizzare i vari tipi di stelle.

In questo capitolo ci proponiamo di indagare la struttura interna delle stelle sviluppando un modello fisico che possa essere sottoposto alla prova delle osservazioni, cioè al confronto con i parametri stellari che si possono ricavare dall'osservazione.

Per far questo, siccome ci aspettiamo intuitivamente che la struttura di una stella sia regolata dalla competizione tra gravità e pressione prodotta dal gas stellare, svilupperemo la discussione secondo questo programma:

- a) riprenderemo brevemente il concetto di temperatura di un gas associandolo alla diversa natura delle particelle che costituiscono lo stesso gas;
- b) costruiremo una procedura generale per calcolare la pressione esercitata da un gas, qualsiasi sia la natura e la distribuzione in energia delle particelle del gas;
- c) useremo i concetti di equilibrio idrostatico ed energetico per sviluppare un modello che ci permetta di indagare la struttura interna di una stella stazionaria;
- d) introdurremo l'idea delle reazioni nucleari come sorgente principale della luminosità stellare e commenteremo brevemente sulla evoluzione delle stelle in relazione all'esaurimento del combustibile nucleare nei centri stellari.

4.1 Temperatura

Il concetto di temperatura è legato a quello dell'equilibrio termodinamico. Dato un gas di particelle, le varie configurazioni possibili per un tale gas possono essere descritte in termini di numero di particelle di data energia che si muovono in una data direzione. Tra tutte le configurazioni possibili per il nostro gas ve ne sarà una che sarà più probabile delle altre ed alla quale il gas tenderà comunque al passare del tempo. Questo comportamento è il risultato delle numerose collisioni che tendono a ridistribuire l'energia tra le particelle del gas fino a che non si sia realizzata una distribuzione di equilibrio che è caratterizzata da un unico parametro T a cui diamo il nome di **temperatura**.

Questa configurazione più probabile si può calcolare con le tecniche della meccanica statistica e la sua espressione analitica dipenderà dalla natura delle particelle del gas che potranno essere:

- identiche e distinguibili (nel limite classico)
- identiche ed indistinguibili di spin semi-intero (p.es. elettroni, neutrini, protoni,...)
- identiche ed indistinguibili di spin intero (p.es. fotoni, nuclei di elio)

In formula abbiamo per i tre casi:

$$n(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)}{e^{(\alpha+\epsilon/kT)} + 0} \quad \text{Maxwell - Boltzmann}$$

$$n(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)}{e^{(\alpha+\epsilon/kT)} + 1} \quad \text{Fermi - Dirac}$$

$$n(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)}{e^{(\alpha+\epsilon/kT)} - 1} \quad \text{Bose - Einstein}$$

dove con $n(\epsilon)$ indichiamo il numero di particelle di energia ϵ , $g(\epsilon)$ è la degenerazione dello stato di energia ϵ ed α è un parametro che dipende dalla densità.

Se il numero totale, N_{tot} , di particelle del gas in questione è costante, allora possiamo imporre che il parametro α debba essere tale da soddisfare la relazione:

$$N_{tot} = \int_0^{\infty} n(\epsilon) d\epsilon.$$

Se invece le particelle che costituiscono il gas sono tali da non conservare il loro numero totale, come nel caso dei fotoni, allora α perde significato e viene posto uguale a zero. Per commentare ulteriormente questo punto ricordiamo che i fotoni possono essere assorbiti e riemessi nell'interazione con la materia determinando un cambiamento anche del loro numero in funzione dell'energia con la quale vengono riemessi. Tuttavia se il numero totale non è necessariamente conservato per i fotoni, l'energia totale deve comunque essere conservata. Si intuirà quindi che una data energia totale del gas si può realizzare con diverse possibili densità di fotoni. Quindi, siccome il numero totale di particelle nel caso dei fotoni non è più conservato, scriveremo:

$$n(\epsilon) = \frac{g(\epsilon)}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (\text{per i fotoni})$$

Se passiamo ora a considerare la probabilità che un particolare stato di energia ϵ sia occupato, nei tre casi già citati avremo:

$$P(\epsilon) = \frac{n(\epsilon)}{g(\epsilon)} = e^{-(\alpha+\epsilon/kT)} \quad \text{Maxwell}$$

$$P(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha+\epsilon/kT} + 1} \quad \text{Fermi} \quad (4.1)$$

$$P(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad \text{Bose - fotoni}$$

dove $P(\epsilon)$ è detto **indice di occupazione**. Se grafichiamo queste funzioni vediamo che il comportamento della distribuzione di Maxwell è un puro esponenziale che può

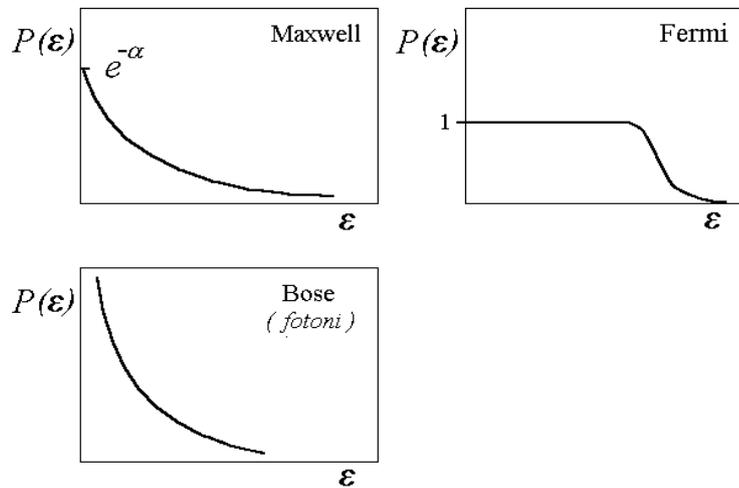


Figura 4.1: Andamento dell'indice di occupazione nei tre casi indicati.

assumere ogni valore per dati α e T (a seconda del valore di α e quindi della densità). La distribuzione di Fermi non supera mai l'unità e questo limite è una conseguenza del principio di esclusione di Pauli che vieta a due particelle di spin semi-intero di occupare lo stesso stato quantico. Si vede che per temperature e densità per cui α è un numero positivo sufficientemente grande la statistica di Fermi-Dirac, che in astrofisica ha una importante applicazione nel calcolo della pressione di un gas di elettroni, si riduce a quella Maxwelliana.

Per un gas di bosoni si ha una particolare tendenza ad occupare gli stati di minore energia e nel caso specifico dei fotoni l'indice di occupazione tende ad infinito al tendere a zero dell'energia. La Figura 4.1 mostra il comportamento dell'indice di occupazione nei tre casi discussi.

Questa descrizione, che ci viene dalla meccanica statistica, fornisce gli strumenti per assegnare una temperatura (il parametro T presente nelle relazioni 4.1) ad un gas in equilibrio termodinamico. Ma che relazione c'è tra le temperature discusse qui e le varie determinazioni osservative della temperatura delle fotosfere stellari? Operativamente la temperatura di un gas sottoposto ad osservazione è determinata in modo tale che il valore di alcune quantità fisiche misurate approssimi il valore che avrebbero quelle stesse quantità in condizioni di equilibrio termodinamico. Le temperature "osservative" di uso più comune sono:

- temperatura efficace, T_{eff}
- temperatura di colore, T_{col}
- temperatura di eccitazione, T_{ecc}
- temperatura di ionizzazione, T_{ion}

che possono convergere ad indicare un unico valore solo nel caso in cui l'oggetto osservato è in equilibrio termodinamico. Siccome nelle superfici stellari le diverse determinazioni

di temperatura possono portare a valori anche molto diversi, dobbiamo concludere che il gas che osserviamo non sempre si può considerare in equilibrio termodinamico. Questo non ci deve meravigliare visto che proprio in prossimità della superficie stellare pressione e densità vanno rapidamente a zero e quindi le collisioni, che rappresentano il meccanismo principale di termalizzazione del gas, diventano sempre più rare.

4.2 Pressione

Un gas perfetto è definito come un insieme di particelle che non interagiscono tra loro. Sebbene però i gas reali non soddisfino a questa condizione, vi si approssimano abbastanza bene finché l'energia media di interazione tra le particelle si mantiene molto minore dell'energia termica media. A questo proposito dobbiamo considerare che nel caso degli interni stellari oltre ad avere un gas completamente ionizzato abbiamo a che fare con densità che possono raggiungere valori dell'ordine di $10^2 \div 10^3 \text{ g cm}^{-3}$. In queste condizioni le interazioni coulombiane potrebbero essere non trascurabili. Per poter concludere che l'approssimazione di gas perfetto va ancora bene dobbiamo allora confrontare tra loro i valori dell'energia termica media ($3/2 kT$) e dell'energia media coulombiana. La condizione di validità si traduce quindi in:

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{d} \ll k T$$

che diventa una condizione sulla densità e temperatura per un gas di idrogeno ionizzato (protoni ed elettroni con $Z_1 = Z_2 = 1$) se si considera che la densità di particelle si può esprimere come $N = N_0 \rho/\mu$, con μ peso molecolare medio che nel nostro caso¹ assumiamo pari ad $1/2$. Esprimendo la distanza tra particelle d in termini della densità ρ e sostituendo i valori numerici si ha quindi:

$$\rho \ll 7 \times 10^{-17} T^3 \text{ g cm}^{-3}$$

Cioè in zone come il centro del Sole con $T \sim 10^7 \text{ K}$ la materia si comporta come un gas perfetto fino a densità dell'ordine di $\rho \sim 7 \times 10^4 \text{ g cm}^{-3}$. Nel determinare il comportamento del gas stellare dovremo quindi preoccuparci delle interazioni coulombiane solo in casi specifici (come stelle di piccola massa che hanno alte densità centrali, o oggetti stellari evoluti come le **nane bianche**).

In termini microscopici la "sorgente" della pressione è il bombardamento delle particelle che trasferiscono momento ad una superficie (reale o immaginaria) che si trovi a contatto col gas. Formalmente la forza esercitata da questo bombardamento è data da $F = dp/dt$ e la media di questa forza per unità di superficie è detta **pressione**. In equilibrio termodinamico negli interni stellari i momenti delle particelle sono distribuiti in modo isotropo e questo, come vedremo, semplifica notevolmente il compito di calcolare la pressione di un simile gas.

Consideriamo quindi la superficie di Figura 4.2 ed immaginiamo che le particelle di un gas in equilibrio termodinamico collidano, provenienti da direzioni isotrope, con la stessa superficie. Il momento trasferito alla superficie dalle particelle di momento p

¹si consideri che nel caso in questione il gas è costituito principalmente da idrogeno ionizzato e quindi in prima approssimazione avremo due particelle per ogni atomo di H.

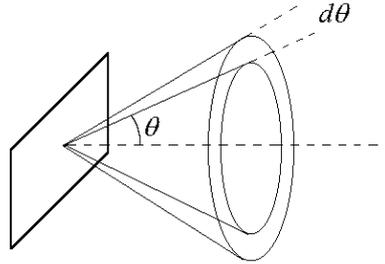


Figura 4.2: Geometria adottata per ricavare l'integrale di pressione.

provenienti da una particolare direzione individuata da un angolo di incidenza θ rispetto alla normale sarà:

$$\Delta p = 2 p \cos\theta$$

dove si è tenuto conto di una riflessione dopo un urto elastico.

Se ora indichiamo con $F(\theta, p) d\theta dp$ la funzione di distribuzione delle particelle rispetto all'angolo di provenienza ed al momento posseduto, possiamo scrivere il contributo di queste particelle alla pressione così :

$$dP = 2 p \cos\theta F(\theta, p) d\theta dp$$

in modo che la pressione totale si potrà ottenere integrando sull'angolo e sui momenti:

$$P = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} 2 p \cos\theta F(\theta, p) d\theta dp \quad (4.2)$$

Per valutare la pressione si pone quindi il problema di esplicitare la funzione $F(\theta, p)$ che nel nostro contesto andremo a esprimere utilizzando la conoscenza delle funzioni di distribuzione dei momenti e le proprietà di isotropia della loro distribuzione angolare. Il flusso di particelle $F(\theta, p)$ si può calcolare allora come prodotto della densità di particelle di momento compreso tra p e $p + dp$ provenienti da direzioni comprese tra gli angoli θ e $\theta + d\theta$ per il volume occupato da quelle particelle in grado di attraversare la nostra superficie di riferimento nell'unità di tempo. Se immaginiamo una superficie di area unitaria il volume a cui ci riferiamo è rappresentato in Figura 4.3 e vale $v_p \cos\theta$.

Avremo quindi che:

$$F(\theta, p) d\theta dp = v_p \cos\theta n(\theta, p) d\theta dp$$

dove $n(\theta, p) d\theta dp$ è la densità di particelle che si muovono nel cono delimitato dagli angoli θ e $\theta + d\theta$ in Figura 4.2.

Sfruttando ora le proprietà di isotropia possiamo scrivere che la frazione di particelle che si muovono in un dato cono è pari alla frazione di angolo solido occupato dal cono considerato. In formula:

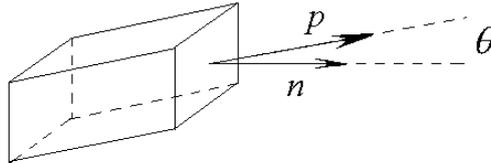


Figura 4.3: Volume di interazione: contiene tutte le particelle di momento p che, provenienti dalla direzione θ rispetto alla normale alla parete, colpiscono la stessa parete nell'unità di tempo.

$$\frac{n(\theta, p) d\theta dp}{n(p) dp} = \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{4\pi}.$$

Da queste due ultime equazioni e dalla equazione (4.2) si ha:

$$P = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} 2 p \cos\theta v_p \cos\theta n(p) dp \frac{\sin\theta}{2} d\theta$$

che, integrando sull'angolo dà subito:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v_p n(p) dp \quad (4.3)$$

Questa relazione rappresenta il legame tra pressione e proprietà microscopiche di un gas isotropo. Notiamo subito che in questa relazione la velocità delle particelle v_p ed il momento associato p sono legati diversamente a seconda del regime relativistico o non-relativistico, mentre la funzione di distribuzione dipenderà dal tipo di particelle che costituiscono il gas e quindi dal tipo di statistica cui obbediscono.

Gas classico

Il caso più semplice di gas perfetto è il monoatomico non-degenerato e non-relativistico (densità e temperatura bassa). Si può mostrare che a partire dalla equazione (4.3) si ottiene la nota relazione:

$$P = N k T \quad (4.4)$$

dove N è il numero di particelle per unità di volume. Se ora introduciamo il peso molecolare medio μ possiamo scrivere per la densità:

$$\rho = N\mu M_u$$

dove M_u rappresenta la massa dell'unità di massa atomica (amu). Ricavando ora N e tenendo conto che $N_0 = 1/M_u$ è il numero di Avogadro otteniamo:

$$N = \frac{\rho}{\mu M_u} = \frac{N_0 \rho}{\mu} \quad (4.5)$$

che, sostituita a sua volta nella equazione (4.4), dà

$$P = \frac{N_0}{\mu} k \rho T \quad (4.6)$$

che esprime la pressione in termini di densità e peso molecolare medio. Per valutare quest'ultimo si dovrà tenere conto dalla composizione chimica del gas in questione e nel paragrafo seguente ci proponiamo di ricavarne l'espressione proprio in termini delle abbondanze chimiche.

Peso molecolare medio

Se indichiamo con X_Z la frazione in massa dell'elemento Z , allora possiamo dire che un grammo di gas conterrà X_Z grammi dell'elemento di numero atomico Z . Ovviamente la conservazione della massa impone che $\sum_Z X_Z = 1$. Supponiamo ora che ogni specie atomica presente nel gas contribuisca con un numero n_Z di particelle libere. Nel caso di completa ionizzazione dell'elemento Z questo corrisponde a dire che $n_Z = Z + 1$, cioè Z elettroni più il nucleo.

Se ora con N_Z ed A_Z indichiamo rispettivamente la densità in numero ed il numero di massa (che è la massa in amu) degli atomi Z , possiamo scrivere:

$$N_Z = \frac{\rho_Z}{A_Z} N_0 = \rho \frac{X_Z}{A_Z} N_0.$$

Tenendo ora conto che il gas è costituito da più componenti, per esprimere il numero totale di particelle libere dovremo sommare tutti i contributi:

$$N = \sum N_Z n_Z = \rho N_0 \sum \frac{X_Z n_Z}{A_Z}$$

e confrontando questa relazione con l'equazione (4.5) otteniamo

$$\frac{1}{\mu} = \sum \frac{X_Z n_Z}{A_Z} \quad (4.7)$$

Nel nostro caso però, avendo a che fare con gas composti in parte predominante da idrogeno ed elio, può essere utile utilizzare un'altra notazione che è comune in ambito astrofisico:

$$\mu = \left[\frac{X n_H}{1.008} + \frac{Y n_{He}}{4.004} + (1 - X - Y) \left\langle \frac{n_Z}{A_Z} \right\rangle \right]^{-1}$$

dove X ed Y indicano rispettivamente le abbondanze dell'idrogeno e dell'elio ed $\left\langle \frac{n_Z}{A_Z} \right\rangle$ rappresenta la media del rapporto n_Z/A_Z per $Z > 2$. Nel caso di completa ionizzazione avremo $n_H = 2$, $n_{He} = 3$, ed $n_Z = Z + 1$. Quando si media

su tutte le specie presenti in natura vale l'approssimazione $A_z \simeq 2Z + 2$, che utilizzata nella precedente consente di ricavare:

$$\mu = \frac{2}{1 + 3X + 0.5Y}$$

Se ora volessimo calcolare il numero di elettroni liberi nel gas avremmo, usando le stesse relazioni:

$$n_e = \sum N_Z(n_Z - 1) = \rho N_0 \frac{\sum X_Z(n_Z - 1)}{A_Z}$$

che in caso di completa ionizzazione e procedendo come prima diventa

$$n_e = \rho N_0 \left[X + \frac{2Y}{4} + (1 - X - Y) \left\langle \frac{Z}{A_Z} \right\rangle \right]. \quad (4.8)$$

Ricorrendo ancora all'approssimazione $A_Z \simeq 2Z + 2$ si ha

$$n_e = 0.5 \rho N_0 (1 + X).$$

Infine volendo riferire il peso molecolare medio ai soli elettroni avremmo scritto la equazione (4.5) come

$$n_e = \frac{\rho N_0}{\mu_e}$$

e per confronto con la equazione (4.7) ricaviamo:

$$\mu_e^{-1} = \sum \frac{X_Z Z}{A_Z}$$

che nel caso di completa ionizzazione diventa $\mu_e \simeq 2/(1 + X)$.

Per concludere questo paragrafo ricordiamo brevemente le limitazioni cui è soggetto il nostro approccio al calcolo della pressione per un un gas classico perfetto:

- considerare gli atomi completamente ionizzati non è sempre possibile, nel caso più generale la frazione di ogni data specie che è ionizzata sarà data dall'equazione di Saha;
- $A_Z \simeq 2Z + 2$ è solo una approssimazione;
- la pressione dovuta alla radiazione negli interni stellari può diventare non trascurabile rispetto a quella generata dalle particelle;
- negli interni stellari il gas elettronico può degenerare e quindi bisognerà adottare l'appropriata funzione di distribuzione per calcolarne la pressione.

4.3 Degenerazione elettronica

Si è visto che gli elettroni obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac (particelle di spin semi-intero) che dà per la densità di elettroni di momento $p = |\vec{p}|$, la seguente relazione:

$$n_e(p) dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 P(p) dp$$

dove $P(p)$ è l'indice di occupazione dato da (vedi 4.1)

$$P(p) = \frac{1}{e^{(\alpha+\epsilon/kT)} + 1} \quad (4.9)$$

il cui valore massimo non può superare l'unità. Conseguentemente il valore massimo della densità di particelle di momento p sarà:

$$n_{e, \max}(p) = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2$$

4.3.1 Degenerazione completa

Vedremo ora come proprio il limite imposto all'indice di occupazione darà luogo ad un diverso andamento della pressione in funzione della densità delle particelle rispetto al caso del gas classico. Infatti se si aumenta continuamente la densità degli elettroni, questi sono costretti ad occupare stati di momento p sempre maggiore e quindi, intuitivamente, a generare una pressione sempre più forte detta **pressione di degenerazione**. Se la densità elettronica aumenta a temperatura costante, allora il parametro α nella equazione (4.9) diventa sempre più piccolo fino a raggiungere grandi valori negativi per alte densità. La funzione $P(p)$ avrà un comportamento di questo tipo:

$$P(p) \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad \epsilon/kT < |\alpha|$$

$$P(p) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \epsilon/kT > |\alpha|$$

e la transizione si avrà nell'intorno di $\epsilon \simeq |\alpha kT|$

Se l'energia $-\alpha kT \gg kT$ allora la funzione $P(p)$ assume un aspetto a gradino ed il valore di energia corrispondente ad $\epsilon_f = |\alpha kT|$ viene detto energia di Fermi. Questa è l'energia al disotto della quale si ha degenerazione completa (tutti gli stati possibili sono occupati). In queste condizioni la densità elettronica si scriverà:

$$n_e(p) dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad \text{per} \quad p < p_0 \quad (\text{massima occupazione})$$

$$n_e(p) dp = 0 \quad \text{per} \quad p > p_0 \quad (\text{vuoto})$$

In un gas siffatto la densità elettronica ed il momento sono collegati da:

$$n_e = \int_0^{p_0} n_e(p) dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3 \implies p_0 = \left(\frac{3 h^3}{8\pi} n_e \right)^{1/3} \quad (4.10)$$

dove abbiamo indicato con p_0 il momento corrispondente all'energia di Fermi E_f .

Per calcolare la pressione di un gas degenerato dobbiamo quindi semplicemente sostituire nella equazione (4.3) l'espressione di $n_e(p)$ data nelle precedenti relazioni. Si nota subito però che prima di procedere all'integrazione della equazione (4.3) dobbiamo esplicitare la relazione tra la velocità e momento che dipende dal regime (relativistico o non relativistico) in cui il gas si trova. Si usa perciò distinguere i due casi.

Caso non relativistico

In questo caso abbiamo che $v_p = p/m$ e l'integrale di pressione si scrive:

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v_p n(p) dp = \frac{1}{3} \int_0^\infty p \frac{p}{m} \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp = \frac{8\pi p_0^5}{15 m h^3}$$

per cui, sostituendo a p_0 l'espressione per il momento di Fermi data nell'equazione (4.10) otteniamo:

$$P_e = \frac{h^2}{20 m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} = \frac{h^2}{20 m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} N_0^{5/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \quad (4.11)$$

Si ricava quindi che, se la pressione per un gas non degenerato varia linearmente con la densità, nel caso di un gas degenerato non-relativistico varia invece come la potenza $5/3$ della densità.

Ma, come ci regoleremo per valutare se le condizioni alle quali si trova il nostro gas siano compatibili con una situazione di degenerazione? A questo proposito ci è utile rappresentare in un piano $\log T$ vs. $\log \rho$ il luogo dei punti che separano le due condizioni di degenerazione e non. Per individuare questa linea di separazione non facciamo altro che eguagliare le espressioni della pressione ricavate nei due casi:

$$\frac{N_0}{\mu_e} k \rho T = \frac{h^2}{20 m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} N_0^{5/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

ottenendo che le due pressioni sono in competizione quando

$$\rho/\mu_e \simeq 2.4 \times 10^{-8} T^{3/2} \text{ g cm}^{-3}$$

e quindi per densità maggiori dovremo ritenere il gas dominato dalla degenerazione. Sottolineiamo comunque che nella regione di transizione tra gas classico e degenerato dovremo usare una descrizione più rigorosa adottando opportune modifiche all'equazione di stato. Tuttavia l'approccio utilizzato è comunque adatto e sufficiente per percepire l'utilità del diagramma $\log T$ vs. $\log \rho$.

Caso relativistico

Abbiamo visto che i fermioni, obbedendo alla statistica di Fermi, tendono ad occupare stati di energia via via maggiore all'aumentare della densità delle particelle. Quindi, continuando ad aumentare la densità, ad un certo momento gli stati liberi ancora disponibili si troveranno a valori tanto grandi (di energia o momento) da corrispondere a particelle relativistiche. Quando questo si verifica non possiamo più utilizzare la relazione della meccanica classica $v_p = p/m$ ma dobbiamo ricorrere ad una trattazione relativistica. È importante allora poter valutare sotto quali condizioni macroscopiche un gas degenerato si debba considerare anche relativistico. Domandiamoci allora: a che valori di densità le particelle più veloci del gas entrano in un regime relativistico?

Iniziamo col considerare che l'espressione relativistica per l'energia totale W (massa a riposo, più energia cinetica) di una particella è:

$$W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

dove m_0 è la massa a riposo e c è la velocità della luce. D'altra parte, se indichiamo con m la massa relativistica, la stessa energia totale si può anche scrivere:

$$W = m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

da cui, se ricaviamo $m_0 c^2$ e lo sostituiamo nella precedente relazione otteniamo che:

$$pc = Wv/c.$$

Per valutare la densità alla quale un gas di fermioni richiede un trattamento relativistico adottiamo un criterio generale: considereremo una particella relativistica se la sua energia totale è almeno il doppio della sua energia a riposo (si provi a valutare la velocità che è implicata da questo criterio). La relazione appropriata è allora $W = 2m_0 c^2$, per cui sostituendo nella precedente e tenendo conto che $v/c \simeq 1$ si ottiene $p_0 c \simeq 2m_0 c^2$. Ma d'altra parte l'espressione di p_0 data dall'equazione (4.10) consente di scrivere per gli elettroni che:

$$p_0 c = hc \left(\frac{3}{8\pi} n_e \right)^{1/3} = 6.12 \times 10^{-11} n_e^{1/3} \text{ MeV} = 5.15 \times 10^{-3} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{1/3} \text{ MeV}$$

Da questa si deduce che, siccome gli elettroni si considereranno relativistici ² ad energie di circa 1 MeV, un gas degenerato di elettroni diventerà relativistico quando la densità supera il valore di $\rho/\mu_e \simeq 7.3 \times 10^6 \text{ g cm}^{-3}$.

Se ora vogliamo calcolare la pressione di un gas siffatto dobbiamo riutilizzare l'equazione (4.3) che definisce la pressione e sostituire in questa l'appropriata relazione velocità-momento data da:

$$v_p = \frac{p/m_0}{\sqrt{1 + (p/m_0 c)^2}}$$

L'integrale per la pressione elettronica diventa quindi:

$$P_e = \frac{8\pi}{3} \frac{m^4}{h^3} \int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}}$$

dove per semplicità di notazione si è indicato con m la massa a riposo. Questo integrale si risolve ponendo $\sinh(\theta) = p/mc$, ottenendo quindi:

$$P_e = \frac{8\pi m^4 c^5}{3 h^3} \int_0^{\theta_0} \sinh^4(\theta) d\theta$$

con $\theta_0 = \sinh^{-1}(p_0/mc)$. Dopo l'integrazione si avrà:

$$P_e = \frac{\pi m^4 c^5}{3 h^3} \left[x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3\sinh^{-1}(x) \right] \quad (4.12)$$

²Per convenzione, consideriamo una particella in regime relativistico se la sua energia totale è pari al doppio di quella a riposo. Quindi per un elettrone, che a riposo ha un'energia di ~ 0.5 MeV, diremo che diventa relativistico quando la sua energia totale supera il valore di ~ 1 MeV.

dove

$$x = \frac{p_0}{m c} = \frac{h}{m c} \left(\frac{3}{8\pi} n_e \right)^{1/3} = \frac{h}{m c} \left(\frac{3}{8\pi} N_0 \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{1/3} \simeq 1.009 \times 10^{-2} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{1/3}$$

Da questa possiamo allora concludere che nel caso relativistico

$$P_e \propto \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \quad (4.13)$$

Ribadiamo infine che questo risultato vale solo per gas degeneri e relativistici, quindi per densità superiori a $\rho \simeq 10^6 \text{ g cm}^{-3}$. A queste densità la degenerazione del gas sarà pressochè completa fino a che le temperature si mantengono al disotto di $T \simeq 10^9 \text{ K}$. Condizioni di alta densità associate a temperature $T > 10^9 \text{ K}$ si possono realizzare solo negli ultimi stadi dell'evoluzione stellare. Per tutte le altre fasi evolutive in cui la degenerazione del gas di elettroni può giocare un ruolo, densità e temperature sono tali da non richiedere una trattazione relativistica. Quello che invece può succedere è il verificarsi di condizioni di degenerazione parziale.

4.3.2 Degenerazione parziale, caso non relativistico

Da quanto fin qui abbiamo visto si potrebbe ricavare l'erronea conclusione che i gas di fermioni possano collocarsi solo in due regimi: non-degenerati o degenerati. Per correggere questa visione diciamo subito che ci dobbiamo anche aspettare una regione intermedia di densità e temperature in cui si verifica una transizione continua tra le due condizioni suddette. Si tratta praticamente di tutti quei casi in cui l'indice di occupazione di Fermi (vedi Figura 4.1) non è caratterizzato da una netta transizione tra i valori $P(p) = 1$ e $P(p) = 0$. In questo caso si procederà come prima a partire dalla equazione (4.3) e considerando la distribuzione dei momenti degli elettroni si ottiene la seguente rappresentazione parametrica:

$$P_e = \frac{8\pi kT}{3 h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{u^{3/2}}{e^{\alpha+u} + 1} du \quad (4.14)$$

$$n_e = \frac{4\pi}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{e^{\alpha+u} + 1} du$$

dove α è il parametro ed $u = p^2/(2mkT)$. Gli integrali che compaiono qui sono tabulati al variare del valore di α che come abbiamo già visto è fissato dalla condizione che data la densità totale n_e deve essere soddisfatta la seconda delle precedenti relazioni. Se indichiamo l'integrale nella prima relazione con $F_{3/2}(\alpha)$ e quello nella seconda con $F_{1/2}(\alpha)$ ricaviamo facilmente una conveniente espressione per la pressione del gas:

$$P_e = n_e kT \left(\frac{2 F_{3/2}}{3 F_{1/2}} \right) \quad (4.15)$$

che ci permette di mettere in evidenza come il fattore tra parentesi è una misura del grado di allontanamento dalla condizione non-degenerata espressa dall'equazione di stato del gas perfetto. In questa discussione sulla degenerazione parziale non abbiamo

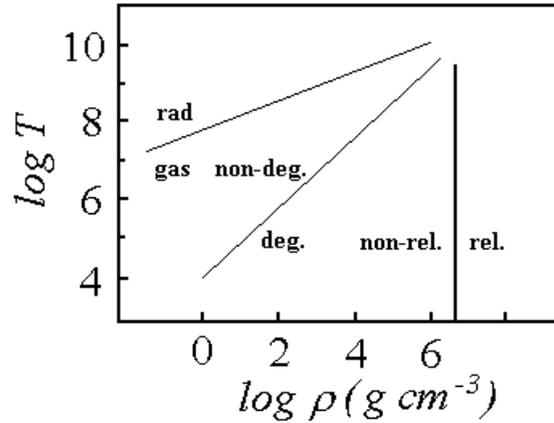


Figura 4.4: Nel diagramma $\log T$ vs $\log \rho$ sono rappresentate le linee di demarcazione tra i vari regimi in cui si può trovare un gas termalizzato di elettroni. L'equazione di stato appropriata ad ogni situazione indicata è discussa nel testo.

considerato il caso relativistico perchè il gas diventa relativistico a densità tali da essere anche completamente degenerato.

A conclusione della nostra discussione sulla determinazione della pressione esercitata da un gas di fermioni, è interessante visualizzare, sempre nel diagramma $\log T$ vs. $\log \rho$, le regioni caratteristiche che corrispondono alle varie situazioni fisiche di cui ci siamo occupati. Il modo più immediato di individuare la regione di separazione tra la situazione non-degenerata e degenerata è di uguagliare le espressioni della pressione ricavate nei due casi (equazioni (4.6) ed (4.11)) ottenendo che la linea di separazione rappresentata in Figura 4.4 è data da $T \propto \rho^{2/3}$. Se poi uguagliamo le equazioni (4.11) ed (4.12) otteniamo che la linea di separazione tra gas non-relativistico e relativistico è data da $\rho = \text{cost}$ e quindi la transizione tra queste due situazioni non dipende da T (Figura 4.4).

4.3.3 Gas di fotoni

Abbiamo già accennato al fatto che anche i fotoni possono esercitare pressione giacchè si tratta di particelle dotate di momento. Infatti ad un fotone di energia $h\nu$ corrisponde un momento pari ad $h\nu/c$ e quindi se un fotone viene riflesso da uno specchio trasmetterà un impulso a quest'ultimo. In una situazione in cui il campo di radiazione sia isotropo (come, per es., nel caso di un corpo nero) possiamo utilizzare l'equazione (4.3) che nel caso dei fotoni ci dà subito:

$$P_r = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{h\nu}{c} c n(\nu) d\nu = \frac{1}{3} \int_0^\infty h\nu n(\nu) d\nu = \frac{1}{3} u \quad (4.16)$$

dove con u abbiamo indicato l'integrale che compare nell'ultima e che altro non è se non la densità di energia totale del campo di radiazione. All'equilibrio termodinamico

questa quantità vale $u = aT^4$ con a costante di Stefan-Boltzmann. Nel caso delle stelle sappiamo già in partenza di non essere in condizioni di stretta isotropia del campo di radiazione, ma abbiamo però visto come la situazione reale si approssima tanto più a questa condizione ideale quanto più si entra negli interni stellari. Per affrontare anche il caso in cui non valga l'approssimazione di stretta isotropia consideriamo un sistema di coordinate cilindriche scegliendo come asse la direzione verso la quale si abbia un flusso netto di energia. Supponendo di non avere gradienti di temperatura nella direzione perpendicolare all'asse prescelto (cosa ragionevole in un modello a strati piani e paralleli) potremo scrivere l'intensità del campo di radiazione come $I(\theta)$ così che $I(\theta) d\Omega$ sarà il flusso di energia per unità di superficie e di tempo (p.es: $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$) che esce entro un angolo solido $d\Omega$ intorno alla direzione θ definita rispetto all'asse delle coordinate. Se ora $u(\theta) d\Omega$ è la densità di energia associata alla radiazione che si muove in direzione θ entro l'angolo solido $d\Omega$ è intuitivo che se c è la velocità di propagazione dell'energia sarà:

$$I(\theta) d\Omega = c u(\theta) d\Omega$$

e se integriamo su tutto l'angolo solido per avere la densità di energia possiamo scrivere:

$$u = \int^{4\pi} u(\theta) d\Omega = \frac{1}{c} \int^{4\pi} I(\theta) d\Omega \quad (4.17)$$

Se ora ricordiamo che il flusso del campo di radiazione attraverso una superficie è definito da:

$$F = \int^{4\pi} I(\theta) \cos\theta d\Omega \quad (4.18)$$

possiamo evidenziare la relazione tra intensità e pressione di radiazione ricordando che il momento associato ad un fotone è $p = h\nu/c$. Quindi, se ad un campo I è associato un flusso di energia, allora al rapporto I/c sarà associato un flusso di momento e quindi la risultante **pressione di radiazione** sarà calcolata da

$$P_r = \int^{4\pi} \frac{I(\theta)\cos\theta}{c} \cos\theta d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I(\theta) \cos^2\theta \sin\theta d\theta \quad (4.19)$$

dove l'ulteriore fattore $\cos\theta$ tiene conto del fatto che solo la componente del momento perpendicolare alla superficie contribuisce alla pressione. A questo punto appare quindi più chiaro anche il senso della quantità K che avevamo introdotto nel capitolo precedente. Ricordiamo infatti che K era stata calcolata come il momento secondo del campo di radiazione al quale ora possiamo finalmente associare il significato fisico che gli deriva dalla stretta relazione con la pressione di radiazione:

$$\frac{c}{4\pi} P_r = K \quad (4.20)$$

È interessante ricordare che negli interni stellari il campo di radiazione tende ad essere tanto più isotropo quanto più si entra nell'interno stellare (si confrontino le soluzioni già ottenute nell'approssimazione di Eddington) nel qual caso potremo esprimere il campo in termini di una serie del tipo:

$$I(\theta) = I_0 + I_1 \cos\theta + \dots \text{termini di ordine superiore}$$

dove I_0 ed I_1 rappresentano rispettivamente la parte isotropa ed anisotropa, quest'ultima legata al flusso netto emergente nella direzione polare. Con l'adozione di questa forma per il campo le equazioni (4.17), (4.18), (4.19) diventano:

$$u = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{c} I_0$$

$$F = 2\pi \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3} I_1$$

$$P_r = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi (I_0 + I_1 \cos\theta) \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3c} I_0$$

Si vede quindi che il flusso netto portato dalla radiazione dipende dalla anisotropia del campo mentre la pressione così come la densità di energia dipendono essenzialmente dalla componente isotropa. Si vede anche che si ritrova la nota relazione:

$$P_r = \frac{1}{3} u = \frac{1}{3} aT^4$$

dove l'ultima uguaglianza è valida solo per campi radiativi di corpo nero. Infine notiamo che se uguagliamo la pressione di un gas perfetto non degenerato a quella dovuta alla radiazione otteniamo la relazione:

$$\frac{N_0}{\mu} k \rho T = \frac{aT^4}{3}$$

che si traduce in:

$$T = 3.2 \times 10^7 \left(\frac{\rho}{\mu} \right)^{1/3}$$

che, nel piano $\log T - \log \rho$, corrisponde alla retta di pendenza 1/3 che separa la regione in cui domina la pressione di radiazione da quella in cui domina la pressione del gas (vedi Figura 4.4).

4.4 Equilibrio idrostatico

Una premessa necessaria agli sviluppi che illustreremo nel seguito a proposito del calcolo delle strutture interne delle stelle riguarda l'ipotesi di stazionarietà. Siccome infatti le stelle sono soggette ad evoluzione è naturale domandarsi se nel costruire un modello fisico per determinarne la struttura possiamo pensarle come oggetti in equilibrio stazionario e quindi descrivibili per mezzo di funzioni (densità, temperatura, pressione...) indipendenti dal tempo. Nel caso delle stelle cosiddette "normali" o di sequenza principale l'adozione di questa ipotesi è certamente giustificata dal fatto che le variazioni temporali dei parametri che descrivono il modello stellare avvengono su scale di tempo molto più lunghe rispetto alle scale temporali tipiche dei processi fisici elementari che ne determinano l'equilibrio. Questo ci autorizza a ritenere la stella ad ogni istante in equilibrio idrostatico.

Quello che ci proponiamo è di determinare l'andamento di quelle grandezze fisiche che definiscono lo stato della materia e della radiazione dal centro alla superficie della

stella. Per far questo la prima equazione che possiamo scrivere è quella dell'equilibrio idrostatico. La otteniamo imponendo che la variazione della pressione su uno strato della stella eguagli il peso dello stesso strato su cui si verifica la variazione di pressione. Si ha cioè:

$$\frac{dP(r)}{dr} = - \frac{G M(r) \rho(r)}{r^2} \quad (4.21)$$

dove G è la costante di gravitazione. $M(r)$ è la massa contenuta all'interno della sfera di raggio r , $\rho(r)$ è la densità e $P(r)$ la pressione a distanza r dal centro. La relazione precedente è un'equazione differenziale nelle tre variabili P , ρ , M e quindi la sua soluzione richiede di trovare altre relazioni indipendenti che leghino le tre variabili. Un'altra relazione è immediatamente suggerita dal fatto che massa e densità sono legate in una geometria sferica da:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (4.22)$$

Infine una terza relazione potrebbe essere fornita da un'equazione di stato per il gas stellare del tipo $P = P(\rho, T)$ che però, se scritta come in generale la scriviamo per il gas perfetto, introduce nel sistema una nuova variabile: la temperatura T .

Proviamo allora ad esprimere la pressione come somma di quella prodotta da un gas perfetto e di quella associata alla radiazione ottenendo:

$$P = \frac{N_0 k \rho T}{\mu} + \frac{aT^4}{3} \quad (4.23)$$

che però non permette ancora di ricavare una struttura stellare a causa della presenza esplicita della temperatura T . È necessario quindi cercare altre relazioni tra le variabili in gioco che non ne introducano di nuove. Una relazione utile viene fornita in particolari condizioni fisiche dalla seguente relazione:

$$P = k \rho^{\frac{n+1}{n}} \quad (4.24)$$

dove k è una costante ed n è detto indice politropico. Un gas che soddisfa ad una equazione di questo tipo è detto **politropo**. Dato che un gas siffatto ci consentirebbe di chiudere il nostro sistema di equazioni ci interessa sapere sotto quali condizioni il gas stellare è descrivibile con la relazione precedente.

Se pensiamo che il gas all'interno delle stelle sia in equilibrio convettivo, possiamo immaginare che ogni elemento di massa che salga o scenda all'interno si adatterà alla densità e temperatura della nuova situazione fino a mettersi in equilibrio con l'ambiente. Se il raggiungimento del nuovo equilibrio avviene senza scambi di calore con l'esterno ($dQ/dT = 0$) allora diremo che la convezione è anche adiabatica e, se la pressione di radiazione non è particolarmente importante, le trasformazioni dell'elemento di gas saranno descritte da:

$$P = k \rho^\gamma \quad (4.25)$$

dove

$$\gamma = \frac{c - c_P}{c - c_V}; \quad \text{con } c = \frac{dQ}{dT}$$

e c_P , c_V rispettivamente calore specifico a pressione e volume costante. Se l'equazione (4.25) descrivesse il comportamento del gas per tutte le posizioni all'interno di una stella ed essendo per un gas perfetto monoatomico $\gamma = 5/3$ avremmo:

$$P(r) = k \rho(r)^{5/3}$$

Per renderci conto dei limiti entro cui possiamo applicare ad una stella questa descrizione proviamo a considerare un caso diverso in cui la pressione di radiazione non sia del tutto trascurabile. Introduciamo allora un parametro $\beta = P_g/P$ definito come il rapporto tra la pressione del gas e la pressione totale data dalla somma dei contributi del gas e della radiazione $P = P_g + P_r$. Questo implica allora che $P_r/P = 1 - \beta$ e quindi potremo scrivere:

$$P_g = \frac{N_0 k \rho T}{\mu} = \beta P \quad (4.26)$$

$$P_r = \frac{1}{3} aT^4 = (1 - \beta) P$$

Se si eguagliano le pressioni ricavate dalla precedenti (4.26) si ottiene per la temperatura l'espressione:

$$T = \left(\frac{N_0 3k}{\mu a} \frac{1 - \beta}{\beta} \right)^{1/3} \rho^{1/3} \quad (4.27)$$

che, sostituita nella prima delle equazioni (4.26), consente di scrivere la pressione come:

$$P = \left[\left(\frac{N_0 k}{\mu} \right)^4 \frac{3}{a} \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right]^{1/3} \rho^{4/3} \quad (4.28)$$

Ricordiamo che in generale β può essere una funzione della posizione r , ma notiamo anche che se β si mantiene costante su tutta la struttura stellare, l'espressione tra parentesi quadre si riduce ad una costante per cui avremmo:

$$P = k \rho^{4/3}$$

Il modello ora descritto corrisponde approssimativamente a stelle in equilibrio radiativo piuttosto che convettivo a causa del ruolo non trascurabile che abbiamo attribuito alla pressione di radiazione. A questo tipo di modello con $\gamma = 4/3$, e quindi con indice politropico $n = 3$, viene dato convenzionalmente il nome di **modello standard** per il fatto che le sue proprietà sono state associate a quelle delle stelle di sequenza principale e studiate in modo approfondito.

Ovviamente per tenere in piedi una massa di gas autogravitante si possono realizzare anche altre possibilità come nel caso, p.es., di alcune stelle evolute che sono tenute in equilibrio dalla pressione di un gas di elettroni degenerati. Gli elettroni sono infatti le prime particelle a degenerare e per rendersene conto si può utilizzare il principio di esclusione di Pauli. Questo, tradotto in termini spaziali, corrisponde alla richiesta che la distanza media tra due particelle debba essere maggiore della lunghezza d'onda ad esse associata. Allora, se p è il momento delle particelle, la lunghezza d'onda ad esse associata è data da $\lambda = h/p$ e quindi per un gas termalizzato abbiamo che:

$$\frac{p^2}{2m} \simeq k T; \quad \text{e quindi} \quad \lambda \simeq \frac{h}{\sqrt{2m kT}}$$

Si vede facilmente quindi come, essendo la massa dell'elettrone minore di quella del protone, all'aumentare della densità del gas la situazione di degenerazione si raggiunga prima per gli elettroni.

Il gas di elettroni degenerati, come abbiamo già visto in precedenza, ha proprio una dipendenza pressione-densità di tipo politropico con esponente pari a $4/3$ o $5/3$ a seconda che si sia in regime relativistico o non. In questi casi è allora possibile usare il medesimo approccio per calcolare la struttura stellare interna di stelle compatte.

4.4.1 Soluzioni di equilibrio

Siccome per il gas delle stelle normali abbiamo visto che vale l'approssimazione di gas perfetto, la usiamo in connessione con l'equazione politropica per ricavare una opportuna dipendenza di ρ da T :

$$P = \frac{N_0 k \rho T}{\mu} = k \rho^{(n+1)/n}$$

da cui vediamo che la condizione per cui un gas perfetto sia anche politropico è data da $\rho \propto T^n$. Riscriviamo allora la densità come $\rho(r) = b \Phi(r)^n$, con b parametro che dipende dalla definizione della nuova funzione Φ . Con questa posizione possiamo riscrivere la pressione:

$$P = k \rho^{(n+1)/n} = k b^{(n+1)/n} \Phi^{(n+1)} \quad (4.29)$$

Ora, l'equazione (4.21) dell'equilibrio idrostatico può essere riscritta così:

$$\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} = -G M(r)$$

e derivando rispetto alla coordinata radiale si ottiene:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{dM(r)}{dr} = -G 4\pi r^2 \rho(r)$$

e quindi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r)$$

Utilizzando poi l'equazione politropica di indice n si ottiene:

$$\frac{(n+1) k b^{1/n}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -4\pi G b \Phi^n \quad (4.30)$$

che viene resa più facilmente leggibile se si nota che

$$a = \left[\frac{(n+1) k b^{(1-n)/n}}{4\pi G} \right]^{1/2} \quad (4.31)$$

ha le dimensioni di una lunghezza. Infatti se si assume a come unità di misura delle lunghezze, possiamo definire una variabile adimensionale

$$\xi = \frac{r}{a}$$

che ci consente di riscrivere l'equazione (4.30) come:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = -\Phi^n \quad (4.32)$$

La precedente viene anche detta **equazione di Lane-Emden** per la struttura del politropo di indice n . La soluzione di questa equazione $\Phi(\xi)$ determina la struttura del gas autogravitante, essendo una funzione della posizione che, per come è stata introdotta, è associabile alla temperatura (vedi la premessa per scrivere l'equazione 4.29). Questa funzione deve però anche soddisfare alcune condizioni al contorno che, al centro della stella ($\xi = 0$), impongono:

- (i) $\Phi = 1$, che implica anche $b = \rho_{\text{centrale}}$
- (ii) $d\Phi/d\xi = 0$.

Con queste condizioni al contorno esistono soluzioni analitiche esplicite per l'equazione (4.32) solo per valori di $n = 0, 1, 5$, mentre per altri valori dell'indice politropico è necessario usare metodi numerici per ricavare l'andamento di $\Phi(\xi)$. Si trova che le soluzioni sono monotone decrescenti per valori di $n \leq 5$ e si annullano per valori finiti di ξ . È evidente che la struttura di ogni politropo sarà determinata in termini della variabile ξ che, per come è stata definita, è una lunghezza in unità di a (vedi eq. 4.21). A sua volta a dipende dalla costante k , che collega pressione e densità, e dal parametro b al quale abbiamo assegnato il senso fisico di densità centrale. Si intuisce quindi che se fissiamo k avremo una famiglia di soluzioni al variare della densità centrale b .

Caso delle soluzioni analitiche

Per esercizio, ricaviamo ora le soluzioni di Lane-Emden nei casi in cui l'indice politropico assuma valori $n = 0, 1, 5$.

Nel caso $n = 0$ l'equazione diventa:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) = -1$$

che integrata una prima volta dà

$$\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{1}{3}\xi^3 - C$$

con C costante di integrazione. Una seconda integrazione dà

$$\Phi = D + \frac{C}{\xi} - \frac{1}{6}\xi^2$$

con D altra costante di integrazione. Si vede ora che all'origine la funzione è singolare (per $\xi \rightarrow 0$, $\Phi \sim C/\xi \rightarrow \infty$). Quindi se ci si restringe al caso finito deve essere $C = 0$ e quindi:

$$\Phi = D - \frac{\xi^2}{6}$$

che, applicando la condizione che all'origine $\Phi(0) = 1$, diventa:

$$\Phi = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$

Il primo zero di questa funzione sarà a $\xi = \xi_1 = \sqrt{6}$ e corrisponderà al limite della struttura fisica in esame.

Nel caso $n = 1$ si trova analogamente che la soluzione è:

$$\Phi = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$$

che ha il primo zero a $\xi_1 = \pi$ ed è monotona decrescente nell'intervallo $[0, \pi]$.

Nel caso $n = 5$ si ottiene:

$$\Phi = \left(1 + \frac{1}{3} \xi^2\right)^{-1/2}$$

che è una funzione monotona decrescente che, tendendo a zero solo per $\xi \rightarrow \infty$, corrisponderebbe ad una configurazione di equilibrio infinitamente estesa.

Notiamo infine che i valori dell'indice politropico per i quali abbiamo soluzioni analitiche non sono utilizzabili per descrivere i gas stellari che, nel caso delle stelle di sequenza principale, sono invece meglio rappresentati da un valore di $n \sim 3$.

Come risalire ai parametri macroscopici

La soluzione dell'equazione (4.32) nel caso più generale di n qualsiasi si può ottenere solo per via numerica, motivo per cui la struttura interna delle stelle è stata indagata solo con l'avvento dei calcolatori elettronici. Per poter procedere ad un confronto tra le previsioni del modello che abbiamo descritto e le osservazioni, dobbiamo poter ricavare i parametri macroscopici stellari (come massa e raggio) a partire dalla conoscenza di $\Phi(\xi)$. Ricordando la definizione di ξ possiamo subito scrivere il raggio stellare per un generico valore dell'indice politropico n :

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)k}{4\pi G}\right]^{1/2} b^{(1-n)/2n} \xi_1 \quad (4.33)$$

mentre per la massa contenuta entro un raggio ξ avremo:

$$M(\xi) = \int_0^\xi 4\pi r^2 \rho dr = \int_0^\xi 4\pi a^2 \xi^2 b \Phi^n a d\xi = 4\pi a^3 \int_0^\xi b \Phi^n \xi^2 d\xi$$

Se ora usiamo la stessa equazione (4.32) e sostituiamo Φ^n otteniamo:

$$M(\xi) = -4\pi a^3 \int_0^\xi b \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right) d\xi = -4\pi a^3 b \xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi}$$

da cui, sostituendo l'unità di lunghezza ed integrando fino al raggio stellare ξ_1 si ha:

$$M(\xi_1) = -4\pi \left[\frac{(n+1)k}{4\pi G}\right]^{3/2} b^{(3-n)/2n} \left(\xi^2 \frac{d\Phi}{d\xi} \right)_{\xi_1} \quad (4.34)$$

Notiamo che nel caso in cui $n = 3$ la massa della stella sarà determinata solo dal valore di k (costante del gas politropico in eq.4.24) e dal prodotto di ξ_1^2 per la pendenza della funzione Φ al primo zero (cioè a ξ_1).

Una volta che dalle relazioni precedenti siano note la massa ed il raggio della configurazione possiamo anche ricavare la densità media $\bar{\rho}$ ed il suo rapporto con la densità centrale $\rho_c = b$ dato da:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_c} = -\frac{3}{\xi_1} \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)_{\xi_1} \quad (4.35)$$

La pressione centrale sarà data a sua volta da:

$$P_c = k\rho_c^{(n+1)/n} = kb^{(n+1)/n}$$

per la interpretazione di b che abbiamo dato precedentemente in conseguenza della condizione $\Phi_{centro} = 1$.

Dalla equazione (4.33) si può ricavare:

$$k b^{(1-n)/n} = \frac{4\pi R^2 G}{(n+1) \xi_1^2} \quad (4.36)$$

Riscrivendo opportunamente l'equazione politropica abbiamo:

$$P_c = k\rho_c^{(1-n)/n} \rho_c^2 = kb^{(1-n)/n} \rho_c^2$$

e ricordando le relazioni (4.35) e (4.36) otteniamo:

$$P_c = \frac{4\pi R^2 G}{(n+1) \xi_1^2} \left[\frac{\xi_1}{3} \frac{1}{(d\Phi/d\xi)_{\xi_1}} \right]^2 \bar{\rho}^2$$

e con opportune sostituzioni:

$$P_c = \left[4\pi (n+1) \left(\frac{d\Phi}{d\xi} \right)_{\xi_1}^2 \right]^{-1} \frac{G M^2}{R^4} \quad (4.37)$$

La temperatura centrale T_c può essere calcolata a partire dalla pressione e dalla densità centrali utilizzando l'appropriata equazione di stato. Nel caso di un gas non degenerato:

$$P_g = \frac{N_0}{\mu} k \rho_c T_c = \beta_c P_c$$

da cui segue che:

$$T_c = \frac{\mu}{N_0 k} \frac{\beta_c P_c}{\rho_c}$$

Nella precedente relazione k è la costante di Boltzmann da non confondere con la costante che compare nella equazione di stato per un gas politropico (cfr. eq.4.24). A questo punto possiamo accennare ad una stima che si può fare delle temperature centrali delle stelle di sequenza principale attraverso le soluzioni ottenute per il modello standard ($n = 3$). Questo modello, sebbene fornisca solo una descrizione approssimativa

della struttura interna delle stelle, è tuttavia utilizzabile per ricavare l'andamento delle temperature centrali. Si trova così che:

$$T_c = 17.4 \times 10^6 \mu \beta (M/M_\odot)^{2/3} \bar{\rho}^{-1/3} \quad (4.38)$$

Esiste poi una relazione semiempirica per la densità media delle stelle di sequenza principale che si può ricavare a partire da misure di masse e raggi:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_\odot}{M/M_\odot}$$

dalla quale si vede che la densità media delle stelle di sequenza diminuisce all'aumentare della massa. Utilizzando questa informazione nella relazione (4.38) e ponendo $\beta \sim 1$ (valido per queste stelle) e $\mu \sim 0.7$ (valido per stelle che hanno parzialmente consumato l'idrogeno in modo tale da avere al centro abbondanze di idrogeno ed elio rispettivamente $X = 0.5$ e $Y = 0.5$) si ha:

$$T_c \sim 1.4 \times 10^7 (M/M_\odot)^{1/3}$$

La Figura 4.5 rappresenta l'andamento della luminosità, massa, temperatura e densità per un modello della struttura interna del Sole. Uno dei risultati più interessanti che si possono ricavare dallo studio della struttura stellare riguarda la costruzione del diagramma H-R teorico che viene mostrato in figura 4.6 e che ci permette di verificare una corrispondenza tra osservazioni (Figure 1.13, 1.17, e 4.7) e modello teorico idrostatico.

In conclusione ricordiamo che fin qui abbiamo considerato solo politropi uniformi e di composizione omogenea, cosa che potrebbe apparire troppo limitativa per descrivere le stelle reali. Quest'approccio effettivamente non sempre offre l'accuratezza richiesta, ma è comunque molto utile per rendersi conto di come sia possibile sviluppare un modello descrittivo della struttura interna delle stelle. Ovviamente una descrizione fisica più accurata richiederà anche una trattazione più complessa che è comunque al di fuori dei nostri scopi.

4.4.2 Il Teorema del Viriale

Abbiamo visto finora come sia possibile, attraverso le equazioni che governano l'equilibrio idrostatico di un gas autogravitante, ricavare l'andamento di grandezze fisiche come densità, massa e raggio in una configurazione di equilibrio. Tuttavia si può notare che le soluzioni ottenute non sono univoche perché dipendono da a , l'unità di lunghezza che abbiamo adottato per adimensionalizzare il nostro problema e che a sua volta dipende da valori di quantità fisiche come n, k, b legate al tipo di gas politropico ed alla densità centrale. Siccome lo stesso valore di a si può ottenere per diversi valori della terna n, k, b , ci rendiamo subito conto come le soluzioni idrostatiche siano degenerate rispetto a questi parametri.

Per selezionare tra le soluzioni matematiche quelle che hanno più senso fisico è necessario imporre ulteriori condizioni. Per esempio, possiamo richiedere che le stelle reali debbano soddisfare non solo l'equilibrio idrostatico ma anche ad altri requisiti che sono essenzialmente legati al bilancio ed al trasporto dell'energia. In altre parole, tra tutte le soluzioni possibili dell'equazione (4.32) di Lane-Emden considereremo come

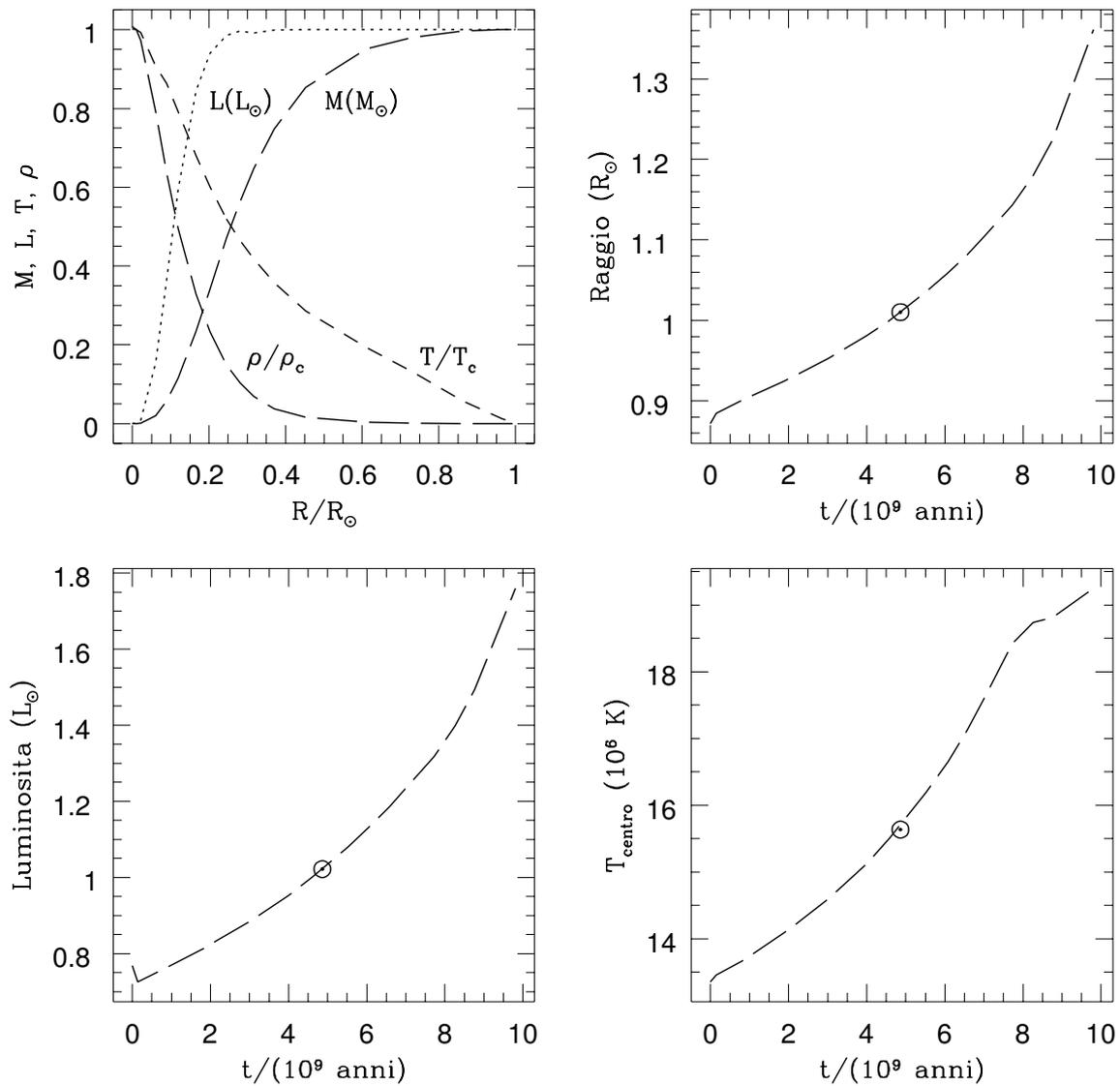


Figura 4.5: In alto a sinistra è riportato l'andamento radiale della massa, luminosità, temperatura e densità per la struttura del Sole. Negli altri riquadri è mostrato il percorso evolutivo del raggio, luminosità e temperatura centrale del Sole.

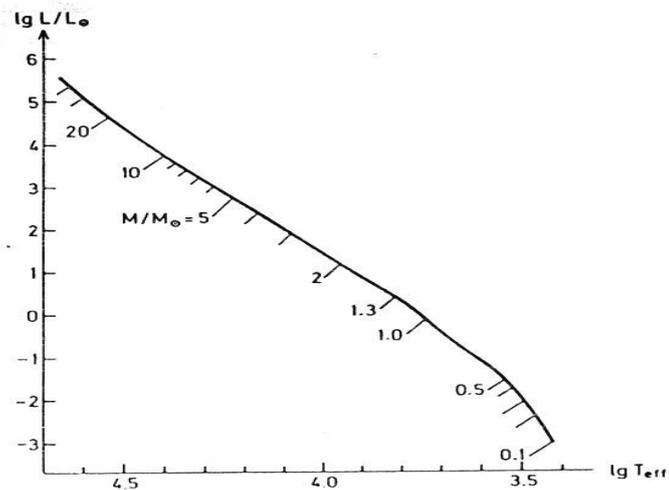


Figura 4.6: Diagramma H-R ricavato sulla base del modello di struttura stellare descritto. Per la composizione chimica del gas stellare sono state adottate abbondanze relative dell'H e dell'He rispettivamente di $X = 0.685$ ed $Y = 0.294$. La linea continua rappresenta la ZAMS (da Zero Age Main Sequence) che è etichettata con i corrispondenti valori della massa stellare espressa in unità della massa del Sole (tra 0.1 e $22 M_{\odot}$).

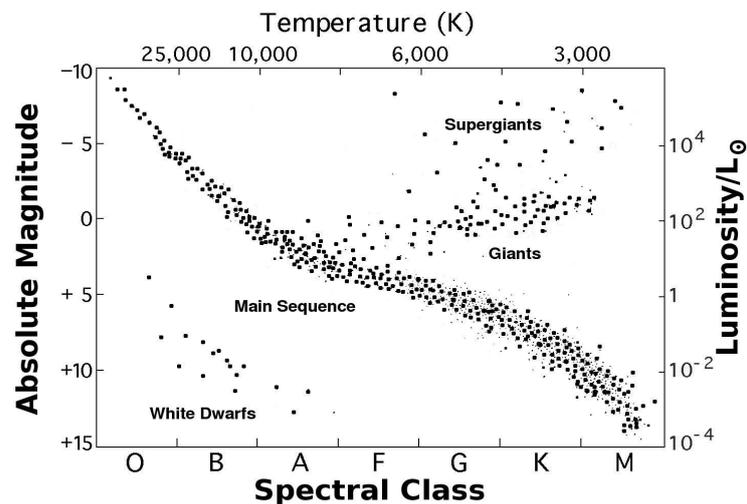


Figura 4.7: Diagramma H-R ricavato dalle osservazioni delle stelle nelle vicinanze del Sole. In questo diagramma si mescolano stelle di varie età e stadi evolutivi per cui nel diagramma vediamo allo stesso tempo popolata sia la sequenza principale che il ramo delle giganti e supergiganti, così come anche quello della nane bianche.

soluzioni fisiche solo quelle che soddisfano ulteriori vincoli imposti sia dall'evidenza fisica (le stelle sono caratterizzate anche dalla loro luminosità) che da teoremi di carattere generale come il **teorema del viriale**. In quest'ultimo caso si tratta di un risultato essenzialmente statistico che si applica ad un insieme di particelle interagenti di massa m_i , posizione r_i e sottoposte alle forze F_i . Le equazioni del moto corrispondenti saranno:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

dove con p_i abbiamo indicato il momento. Consideriamo ora la quantità $\sum \vec{p}_i \vec{r}_i$ nella quale la somma è estesa a tutte le particelle, e deriviamola rispetto al tempo. Avremo:

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p}_i \vec{r}_i = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} \vec{r}_i + \sum \vec{p}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (4.39)$$

Il primo membro dell'equazione precedente si può riscrivere così:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_i r_i^2) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I$$

dove con $I = \sum m_i r_i^2$ abbiamo indicato una quantità che ha le dimensioni di un momento di inerzia, anche se non è propriamente un momento di inerzia non essendo le posizioni r_i riferite ad un asse di rotazione ma piuttosto ad un'origine.

Per l'ultimo termine al secondo membro dell'equazione (4.39) abbiamo invece che:

$$\sum \vec{p}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum m_i v_i^2 = 2K$$

dove con K si è indicata l'energia cinetica totale. Tenendo allora conto delle due relazioni precedenti l'equazione (4.39) diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + \sum \vec{F}_i \vec{r}_i$$

Il termine $\sum \vec{F}_i \vec{r}_i$, detto **viriale di Clausius**, include tutte le forze esterne ed interne agenti su ogni particella del sistema. È ovvio però che le forze generate dalle collisioni tra particelle daranno un contributo netto nullo alla sommatoria perchè danno luogo a coppie di termini che si elidono a vicenda. Nel nostro caso particolare possiamo inoltre non considerare la parte del viriale dovuta alle forze esterne giacchè sul "sistema stella", considerato come isolato, agiscono praticamente solo quelle interne.

Notiamo poi che, se la configurazione del sistema di particelle è stazionaria, il valore di I rimane costante nel tempo e quindi la sua derivata temporale sarà nulla, ottenendo in questo caso:

$$K = -\frac{1}{2} \sum \vec{F}_i \vec{r}_i \quad (4.40)$$

Nel valutare il viriale ora dovremmo tener conto che le forze interne sono essenzialmente di origine elettrica e gravitazionale, con le prime molto più intense delle seconde. Tuttavia, a causa della natura duale delle forze elettriche (attrattive e repulsive) ed essendo in presenza di un gran numero di particelle, possiamo considerare il loro contributo

alla sommatoria trascurabile rispetto a quello, sempre additivo, delle forze gravitazionali. Avremo quindi:

$$\sum \vec{F}_i \vec{r}_i = \sum_{\text{coppie } i,j} \vec{F}_{ij} \vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \vec{r}_j$$

con la sommatoria a destra estesa a tutte le coppie di particelle. Poichè possiamo scrivere che $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ allora la precedente diventa:

$$\sum \vec{F}_i \vec{r}_i = \sum_{\text{coppie } i,j} \vec{F}_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

per cui, tenendo conto che \vec{F}_{ij} è la forza gravitazionale, otteniamo:

$$\sum \vec{F}_i \vec{r}_i = \sum_{\text{coppie } i,j} -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \sum_{\text{coppie } i,j} -\frac{G m_i m_j}{r_{ij}}$$

dove con r_{ij} si è indicato il modulo della distanza tra due particelle. Si vede quindi come in questo caso il viriale rappresenta proprio l'energia potenziale gravitazionale totale del sistema. Allora, indicando con Ω questa energia l'equazione (4.40) si potrà riscrivere;

$$K = -\frac{\Omega}{2} \quad (4.41)$$

e siccome in un gas non degenerato e all'equilibrio termico l'energia cinetica è legata alla temperatura, la relazione precedente implica che una contrazione della stella genera un aumento della temperatura. Notiamo infine che questa relazione applicata al caso stellare implica che, siccome solo una metà dell'energia potenziale gravitazionale viene convertita in energia termica interna, durante la formazione di una stella dovrà anche essere rilasciata una quantità di energia pari a $-\Omega/2$ sotto altre forme.

4.5 Equilibrio Energetico

Si è visto che un modello stazionario per la struttura di una stella normale può essere efficacemente sviluppato imponendo il criterio di equilibrio idrostatico e considerando un gas di tipo politropico. Tuttavia in generale non abbiamo la certezza che i politropi che abbiamo assunto corrispondano effettivamente alle stelle reali giacchè possiamo aspettarci che la relazione pressione-densità possa variare all'interno della struttura. Dobbiamo poi considerare che le soluzioni idrostatiche non ci consentono di risolvere il problema completamente visto che la definizione dell'unità di lunghezza assunta (eq. 4.31) determina una "degenerazione" delle soluzioni matematiche. È chiaro quindi che se vogliamo selezionare le soluzioni fisiche tra tutte le possibili soluzioni matematiche della equazione di Lane-Emden dobbiamo introdurre dei criteri aggiuntivi che devono essere soddisfatti dalla struttura stellare per essere considerata "realistica". Uno di questi è certamente il teorema del viriale, di cui abbiamo discusso poc'anzi, che ci permette di accettare solo quelle configurazioni per le quali l'energia cinetica interna è pari alla metà dell'energia gravitazionale. C'è però un altro criterio che ci consente di specificare meglio la struttura interna delle stelle e che è legato strettamente alla produzione di energia nel core stellare. Si richiederà allora che le soluzioni non solo siano

in equilibrio idrostatico ma anche corrispondano a strutture in grado di trasportare la luminosità osservata. Una simile condizione può essere espressa attraverso queste due affermazioni equivalenti:

- il flusso di energia, e quindi la luminosità, sarà determinato dal gradiente di temperatura e dal tipo di trasporto dell'energia attraverso la struttura
- la luminosità di una stella "stazionaria" deve essere uguale alla velocità con cui le reazioni nucleari nell'interno generano energia.

Un modello che soddisfi contemporaneamente all'equilibrio idrostatico, al teorema del viriale e a questi criteri sulla luminosità può considerarsi come una buona rappresentazione delle stelle fisiche.

Per discutere meglio questo vincolo che imponiamo alla luminosità ricordiamo che i possibili meccanismi di trasporto dell'energia sono essenzialmente la **conduzione**, la **convezione** e l'**irraggiamento**. Questi meccanismi sono attivati, pur se con diverse efficienze, in presenza di un gradiente di temperatura. Per esempio, nel caso della radiazione di black-body in cui la densità di energia è espressa da $u = aT^4$, è evidente che nelle regioni a maggiore temperatura vi sarà una maggiore densità di energia e che questa tenderà naturalmente a diffondere verso le regioni più fredde per stabilire un equilibrio tra le due regioni. Il solo ostacolo a questo processo di trasporto radiativo è rappresentato dalle interazioni della radiazione con il gas stellare che sarà caratterizzato da una sua opacità.

Se l'energia viene trasferita da un punto all'altro dalle stesse particelle del gas allora parleremo di conduzione o convezione a seconda che il meccanismo implichi moti microscopici o macroscopici del gas. Tuttavia, con l'eccezione dei casi in cui il gas è degenerato, il meccanismo conduttivo è sempre meno efficiente degli altri due, pur essendo attivato come gli altri dal gradiente della temperatura. Siccome nelle stelle normali il trasporto di energia è dominato da radiazione e convezione, nel seguito ci occuperemo solo di questi due aspetti. In particolare vedremo come il meccanismo radiativo consente di trasportare energia fino ad un certo limite, superato il quale il gas diventa instabile e si instaura la convezione. In ogni caso, indipendentemente dal tipo di trasporto, il requisito che dovrà essere sempre soddisfatto è quello della conservazione dell'energia.

Abbiamo sottolineato, parlando del teorema del viriale, come una sfera gassosa autogravitante debba liberare la metà della sua energia potenziale gravitazionale durante la contrazione per potersi assestare all'equilibrio termico. Questo meccanismo potrebbe essere invocato per spiegare la luminosità delle stelle, ma un semplice calcolo dell'energia richiesta per far brillare una stella durante tutto il tempo di sequenza principale ne mostra facilmente l'inadeguatezza. È quindi necessario invocare la presenza di un'altra sorgente di energia che è suggerita dalla possibilità di ottenere reazioni nucleari in una regione centrale delle stelle, detta **core**, nella quale si realizzano condizioni di temperatura e densità tali da permettere la trasformazione esotermica di elementi leggeri in pesanti. La quantità di energia liberata dalle reazioni nucleari sarà in generale una funzione della posizione, essendo determinata dai valori locali di densità ρ , temperatura T e composizione chimica (X, Y, Z) , con Z percentuale in massa degli elementi pesanti. Se indichiamo con $\epsilon(\rho, T, X, Y, Z)$ la potenza liberata da un grammo di gas stellare per effetto delle reazioni nucleari, l'energia liberata in un centimetro cubo di gas sarà data

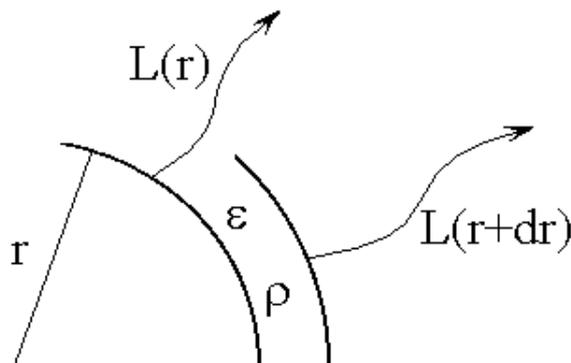


Figura 4.8

da $\rho = \rho(\rho, T, X, Y, Z)$ e quindi per una stella stazionaria potremo scrivere il seguente bilancio energetico:

$$L_* = \int_{\text{Volume}} \rho \epsilon(\rho, T, X, Y, Z) dV = \int_0^{R_*} 4\pi r^2 \rho \epsilon(\rho, T, X, Y, Z) dr \quad (4.42)$$

Questa stessa equazione, che qui abbiamo scritto per tutta la stella, la possiamo riscrivere in forma differenziale giacchè la stazionarietà della struttura impone che deve valere per ogni porzione della stella. In particolare per una buccia sferica avremo:

$$dL(r) = \rho(r) \epsilon(r) 4\pi r^2 dr$$

dove $dL(r)$ è la differenza tra la luminosità uscente e quella entrante nella buccia di spessore dr considerata (Figura 4.8).

La relazione (4.42) può anche essere espressa in forma differenziale³:

$$\frac{dL(r)}{dM(r)} = \epsilon(r)$$

ed in forma mediata fino ad un raggio r può essere espressa come:

$$\frac{L(r)}{M(r)} = \overline{\epsilon(r)} \quad (4.43)$$

³nel caso in cui la struttura della stella subisca una lenta contrazione diventa:

$$\frac{dL(r)}{dM(r)} = \epsilon(r) - T \frac{dS}{dt}$$

con S che rappresenta l'entropia per unità di massa.

Siccome abbiamo già anticipato che il meccanismo di trasporto per conduzione riveste un ruolo trascurabile nel determinare l'equilibrio energetico delle stelle, nel seguito ci occuperemo solo di discutere l'irraggiamento e la convezione. L'efficienza di questi meccanismi sarà poi legata al gradiente della temperatura ed alla capacità della radiazione e del gas di muoversi all'interno della stella.

4.5.1 Trasporto Radiativo

Il fondamento fisico della teoria del trasporto radiativo si può agevolmente comprendere considerando un problema molto semplificato. Immaginiamo di avere due pareti di corpi neri posti a diverse temperature e che tra le due pareti ci sia il vuoto. L'emissione integrata sulle frequenze e sull'angolo solido del corpo nero sappiamo essere σT^4 e quindi, considerando le due pareti⁴ affacciate a temperatura diversa, possiamo scrivere un bilancio tra il flusso entrante ed uscente dalla parete a temperatura maggiore. Tenendo conto che un corpo nero assorbe tutta l'energia incidente avremo:

$$F = \sigma [(T + \Delta T)^4 - T^4] \simeq 4 \sigma T^3 dT \quad (4.44)$$

essendo $(T + \Delta T)$ e T le temperature relative alle due pareti. A questo punto la stella può essere immaginata come una serie concentrica di pareti a temperature crescenti verso il centro e distanziate di un libero cammino medio dei fotoni. La differenza di temperatura tra due strati successivi sarà in questo caso data dal gradiente di T della struttura stellare per la distanza tra gli strati, cioè:

$$\frac{dT}{dr} \bar{\ell} \simeq dT$$

dove con $\bar{\ell}$ si è indicato il libero cammino medio dei fotoni. L'equazione (4.44) si può allora riscrivere:

$$F = -4 \sigma T^3 \bar{\ell} \frac{dT}{dr} \quad (4.45)$$

nella quale il segno meno indica che il flusso è in direzione opposta al gradiente della temperatura. Nella equazione precedente $\bar{\ell}$ è determinato dalle interazioni tra radiazione e gas stellare e quindi possiamo valutarlo utilizzando un coefficiente di assorbimento tipico del gas. Sappiamo infatti che la diminuzione dell'intensità della radiazione è descritta dalla relazione

$$\frac{dI}{dr} = -\bar{k} \rho I$$

con \bar{k} coefficiente di assorbimento medio che è poi anche funzione della frequenza della radiazione. Su distanze per le quali ρ e \bar{k} si possono considerare costanti la precedente equazione ha la nota soluzione

$$I(r) \propto e^{(-\bar{k} \rho r)}$$

dalla quale è facile vedere che $\bar{\ell} \simeq 1/(\bar{k} \rho)$ giacchè sostituendo ad r questo valore l'intensità si riduce di $1/e$ volte⁵. Adottando quindi $1/(\bar{k} \rho)$ come stima del libero

⁴qui, idealmente, infinitamente estese

⁵caso con profondità ottica $\tau = 1$ che usiamo come separatore tra caso di mezzo trasparente ($\tau < 1$, optically thin) ed opaco ($\tau > 1$, optically thick)

cammino medio dei fotoni la equazione (4.45) diventa:

$$F \simeq -\frac{4\sigma}{k\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (4.46)$$

che fa vedere come il flusso di energia sia proporzionale al gradiente di T^4 ed inversamente proporzionale al prodotto $k\rho$ dell'opacità per la densità.

Questa relazione, pur se ricavata in modo approssimato, mostra la corretta dipendenza dalle grandezze in gioco nel trasportare l'energia radiativa. Un modo più rigoroso di ricavare questa relazione avrebbe tenuto conto sia della componente diffusa del campo di radiazione che della dipendenza dalla frequenza dell'opacità e ci avrebbe portato alla relazione:

$$F = -\frac{4}{3} \left(\frac{4\sigma}{k\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{4}{3} \frac{a}{k} \frac{c}{\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (4.47)$$

dove si è usata la corrispondenza⁶ $\sigma = c a/4$. Si nota subito che la forma è molto simile alla equazione (4.46) con la importante differenza che ora il coefficiente di assorbimento è dato dall' **opacità media di Rosseland** che è una media pesata su tutte le frequenze data da:

$$\frac{1}{k} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_{\nu,a}^* + k_{\nu,s}} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (4.48)$$

dove $k_{\nu,a}$ e $k_{\nu,s}$ sono rispettivamente le opacità alla frequenza ν per assorbimento e per scattering e l'asterisco indica che si è tenuto conto della correzione per l'emissione indotta. Il fatto che la funzione peso sia proprio la funzione di Planck evidenzia che le frequenze che contribuiscono maggiormente al trasporto dell'energia sono quelle per le quali la variazione con la temperatura della funzione B_ν è massima. In altre parole le frequenze più importanti nel trasporto sono quelle per le quali la differenza di densità di fotoni, tra due regioni a temperatura diversa, è massima.

Se ora moltiplichiamo la (4.47) per la superficie di una sfera a distanza r otteniamo la luminosità che attraversa la superficie:

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{4}{3} \frac{a}{k} \frac{c}{\rho} T^3 \frac{dT}{dr} \quad (4.49)$$

che è una delle equazioni fondamentali cui deve sottostare la struttura di una stella in equilibrio radiativo. Per questo tipo di stelle possiamo ricavare importanti proprietà proprio a partire dalla relazione precedente.

Se infatti, usando la relazione (4.16) ricaviamo la derivata della pressione di radiazione nel caso del corpo nero, vediamo che possiamo riscrivere l'equazione (4.49) nella forma:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{k\rho}{4\pi c r^2} L(r) \quad (4.50)$$

⁶Questa corrispondenza si può provare ricordando che aT^4 rappresenta la densità di energia del campo di radiazione per un Black Body, mentre σT^4 è il flusso totale emesso dall'unità di superficie. Mettendo insieme i due concetti attraverso la definizione di flusso si trova la corrispondenza $\sigma = c a/4$.

D'altra parte, se la stella è stazionaria, varrà la condizione di equilibrio idrostatico

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G M(r) \rho}{r^2}$$

per cui, dividendo le ultime due relazioni si ricava che

$$\frac{dP_r}{dP} = \frac{kL(r)}{4\pi c G M(r)} \quad (4.51)$$

Se definiamo ora il rapporto $\eta(r) = \overline{\epsilon(r)}/\epsilon$ tra la quantità media di energia liberata per ogni grammo entro la distanza r e la corrispondente quantità mediata su tutta la stella, possiamo scrivere

$$\eta(r) = \frac{\overline{\epsilon(r)}}{\epsilon} = \frac{L(r)/M(r)}{L_*/M_*}$$

dove L_* ed M_* indicano la luminosità totale e la massa totale della stella. In termini di η possiamo allora riscrivere la (4.51) come

$$\frac{dP_r}{dP} = \frac{L_*}{4\pi c G M_*} k \eta$$

Integrando questa equazione dalla superficie ad un punto interno a distanza r avremo:

$$\int_0^{P_r(r)} dP_r = \frac{L_*}{4\pi c G M_*} \int_0^{P(r)} k(r) \eta(r) dP$$

che consente di ottenere:

$$P_r = \frac{L_*}{4\pi c G M_*} P(r) (\overline{k\eta})_r \quad (4.52)$$

dove con $(\overline{k\eta})_r$ si è indicata la media rispetto alla pressione di $k\eta$ tra la superficie ed r . L'equazione precedente coinvolge quindi il rapporto tra pressione di radiazione e pressione totale ad una data posizione r e ci permette quindi di scrivere nel caso del centro stellare

$$L_* = \frac{4\pi c G M_*(1 - \beta_c)}{\overline{k\eta}}$$

dove $\beta_c = (P_g/P)_c$, definito dalla equazione (4.26), è calcolato al centro e $\overline{k\eta}$ è ora mediato sull'intera stella. Ricordiamo che questa relazione vale per stelle in equilibrio radiativo essendo basata sulla descrizione che abbiamo dato per lo scambio radiativo tra regioni a differente temperatura. Notiamo che nel caso in cui la media $\overline{k\eta}$ fosse una quantità costante con la profondità, avremmo necessariamente che β debba essere costante per soddisfare la precedente equazione (4.52). Ma se β è una costante l'equazione (4.28), ricavata dividendo le espressioni per la pressione di radiazione e del gas, diventa del tipo

$$P = \text{cost } \rho^{4/3}$$

cioè proprio il politropo del modello standard con $n=3$ (cfr. eq. 4.24), valore che meglio rappresenta le stelle normali. A questo proposito è interessante notare che le

condizioni fisiche del gas nelle stelle di sequenza principale sono tali che dal centro verso la superficie l'opacità del gas k tende ad aumentare di vari ordini di grandezza, mentre η diminuisce in maniera tale che il loro prodotto $k\eta$ si mantiene approssimativamente indipendente dalla posizione. È proprio questa combinazione favorevole che giustifica *a posteriori* l'assunzione che β sia una costante della struttura, situazione che ci permette di poter applicare con successo quello che abbiamo chiamato **modello standard** per le stelle reali.

Un'ultima considerazione la riserviamo alla interpretazione della relazione osservativa $L \propto M^\nu$ con $\nu = 3.5 \div 4$ tra luminosità e massa delle stelle di sequenza principale. Per ricavare una relazione tra L ed M alla luce del modello di stella finora descritto ricordiamo che si è già ricavato che la temperatura centrale ha una dipendenza del tipo (eq. 4.38)

$$T_c \propto M^{2/3} \bar{\rho}^{1/3} \propto M/R$$

e tenendo presente che $\bar{\rho} \propto M/R^3$ e che come grossolana approssimazione per il gradiente della temperatura possiamo adottare $dT/dr \propto T_c/R_* \propto M/R^2$, possiamo riscrivere la dipendenza della luminosità dalle altre grandezze a partire dalla equazione (4.49)

$$L_* \propto R_*^2 \frac{(M/R)^3}{M/R^3} \frac{M/R}{R} = M^3$$

Si vede quindi che la dipendenza ottenuta non rende perfettamente conto del risultato osservativo ($L_* \propto M^{3.5 \div 4}$) anche se si deve ammettere che si avvicina in un modo sorprendente, tenuto conto delle approssimazioni usate. Naturalmente possiamo affinare il nostro modello considerando anche la possibilità che l'energia prodotta negli interni stellari possa essere trasportata non solo attraverso la diffusione della radiazione ma anche attraverso la convezione di cui ora ci occuperemo.

4.5.2 Instabilità convettiva

Si è visto che quando il meccanismo di trasporto dell'energia è di tipo radiativo vale la relazione (4.47) che, nel caso del modello standard (indice politropico $n=3$) adatto a descrivere le stelle di sequenza principale, si può anche riscrivere come:

$$F = \text{cost} \frac{1}{k} \frac{dT}{dr}$$

avendo tenuto conto che per il modello standard si ha anche che $T^3/\rho = \text{cost}$ (vedi eq. 4.27, ricordando anche che per le stelle di sequenza $\beta \sim \text{costante}$).

Se richiediamo al modello di descrivere stelle stazionarie, allora questo valore di flusso deve essere sufficiente a portare fuori tutta l'energia prodotta negli interni, il che equivale ad imporre il gradiente di temperatura. Può succedere però che le opacità del gas siano tanto elevate da richiedere gradienti di temperatura molto forti per riuscire a sostenere il flusso di energia necessario all'equilibrio. A questo punto dobbiamo allora domandarci fino a che punto sia possibile innalzare il gradiente della temperatura senza provocare variazioni nella struttura. Per renderci conto del problema utilizziamo una semplice argomentazione, dovuta a Schwarzschild (e per questo detta **criterio di Schwarzschild**), che mostra come non si possa elevare il gradiente della temperatura arbitrariamente senza provocare instabilità.

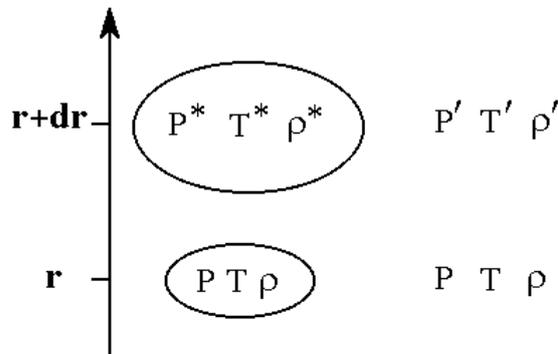


Figura 4.9: Illustrazione del criterio di instabilità convettiva

Partiamo dal considerare un sistema come stabile se questo mostra una tendenza a tornare nella configurazione di equilibrio una volta che ne venga allontanato. Volendo applicare questo criterio ad un elemento di gas stellare a distanza r dal centro, caratterizzato da pressione P , densità ρ e temperatura T , immaginiamo di poter spostare una certa quantità di gas contenuto in un dato volume. In Figura 4.9 è rappresentata una situazione in cui il gas, nel passare da distanza r ad $r + dr$, oltre a variare il volume occupato modifica al suo interno il valore dei parametri termodinamici che nella nuova posizione vengono indicati con un asterisco.

Si noti che anche la struttura stellare sarà caratterizzata dai suoi propri andamenti di pressione, temperatura e densità che vengono indicati in figura con un apice. In pratica quando l'elemento di massa viene spostato dalla posizione r ad $r + dr$ subisce una trasformazione termodinamica che lo porta in equilibrio di pressione con il nuovo ambiente circostante. Infatti è proprio la pressione che richiede i tempi di aggiustamento più brevi ed è per questo che la trasformazione termodinamica può essere ragionevolmente descritta da una adiabatica.

A questo punto è intuitivo esprimere il criterio di stabilità guardando al valore che la densità raggiunge nella nuova posizione rispetto alla densità dell'ambiente circostante. Infatti se vogliamo che il gas spostato nella nuova posizione tenda a ritornare al punto di partenza dobbiamo richiedere che:

$$\rho^* > \rho'$$

Per meglio specificare questo criterio in termini delle funzioni che descrivono la struttura stellare richiamiamo ora una relazione che vale nel caso delle trasformazioni adiabatiche

$$\frac{dP}{P} = -\Gamma_1 \frac{dV}{V} = \Gamma_1 \frac{d\rho}{\rho}$$

dove Γ_1 prende il nome di **primo esponente adiabatico** e nel caso del gas perfetto coincide col rapporto dei calori specifici γ .

Possiamo ora scrivere per la densità nella posizione $r + dr$:

$$\rho^* = \rho + d\rho = \rho + \frac{\rho}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} dr$$

D'altra parte la densità nel nuovo ambiente circostante sarà data dall'andamento della densità nella struttura e quindi:

$$\rho' = \rho + \frac{d\rho}{dr} dr$$

per cui il criterio di stabilità si potrà riscrivere

$$\frac{\rho}{\Gamma_1 P} \frac{dP}{dr} > \frac{d\rho}{dr}$$

Per collegare questo criterio di stabilità con il meccanismo di trasporto radiativo dell'energia, dovremmo poterlo esprimere in termini del gradiente della temperatura che sempre gioca un ruolo importante nell'attivare i meccanismi di trasporto dell'energia. A questo scopo ricordiamo che se $\rho^* > \rho'$ allora, per ottenere l'equilibrio di pressione nella nuova posizione $r + dr$ deve essere anche $T^* < T'$ e quindi in termini di gradienti avremo in modulo:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{stella}} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{adiabatico}} \quad (4.53)$$

che in altri termini significa che la struttura della stella sarà instabile rispetto alla convezione se il gradiente di temperatura è troppo alto. Volendo quantificare questo criterio in termini della luminosità trasportata dallo stesso gradiente di temperatura, è utile richiamare una seconda relazione valida per le trasformazioni adiabatiche:

$$\frac{dP}{P} = - \frac{\Gamma_2}{1 - \Gamma_2} \frac{dT}{T}$$

in cui Γ_2 è detto **secondo esponente adiabatico**⁷. La condizione di equilibrio espressa prima dalla (4.53) diventa così

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_{\text{stella}} > - \frac{1 - \Gamma_2}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \left(\frac{dP}{dr} \right)_{\text{stella}}$$

dove è stata sfruttata la condizione

$$\left(\frac{dP}{dr} \right)_{\text{adiabatico}} = \left(\frac{dP}{dr} \right)_{\text{stella}}$$

che deriva dalla rapidità con cui la pressione va in equilibrio con l'ambiente. Stabilite queste relazioni possiamo ora riscrivere la relazione (4.49) che lega la luminosità trasportata per via radiativa al gradiente di T :

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3 k \rho}{4ac T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

⁷ Γ_1 descrive come la pressione risponde alla compressione, Γ_2 come la temperatura risponde ai cambiamenti di pressione. Sono funzioni dello stato termodinamico ed in particolare anche del rapporto β che abbiamo introdotto prima tra pressione del gas e pressione totale. Per un gas ideale $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 5/3$, per la radiazione $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 4/3$, per una miscela di gas e radiazione il valore dipenderà da β .

Da questa, utilizzando la condizione di stabilità espressa dalla relazione (4.53) si trova che:

$$-\frac{3k\rho}{4acT^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} > -\frac{1-\Gamma_2}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

e, utilizzando la condizione dell'equilibrio idrostatico per eliminare dP/dr si ottiene:

$$L(r) < \frac{16\pi acG}{3k} \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T^4}{P} M(r) \quad (4.54)$$

Questa relazione mostra quindi come vi sia un valore limite per la luminosità trasportabile per via radiativa in condizioni di stabilità convettiva. Nel caso di un gas perfetto non degenerato dalla precedente si può ricavare:

$$L(r) < 1.22 \times 10^{-18} \frac{\mu T^3}{k\rho} M(r) \quad (4.55)$$

relazione che mostra come all'aumentare di k e ρ diminuisca la luminosità che la struttura può trasportare senza indurre la convezione (ricordiamo che qui k rappresenta l'opacità del mezzo). Se la stella è poi ben approssimata dal modello standard (che come abbiamo visto prima implica un indice politropico $n=3$), allora abbiamo che il termine T^3/ρ si mantiene costante (vedi eq. 4.27) e quindi dalla relazione precedente vediamo come la luminosità sarà limitata da una quantità proporzionale ad $M(r)/k(r)$.

Questo tipo di dipendenza ci suggerisce quindi una spiegazione per l'instabilità convettiva della superficie del Sole. Se infatti consideriamo che muovendoci verso gli strati più esterni del Sole la temperatura decresce, ne deriva che l'opacità del gas, che sta al denominatore, tende a crescere mentre la massa della stella è ormai praticamente una costante. Come risultato avremo che, nella relazione precedente, il termine a destra tenderà a decrescere verso la superficie, mentre la luminosità da trasportare sarà sempre la stessa, e quindi costante, visto che non è altro che quella prodotta nel core.

Vedremo poi più avanti come questo stesso criterio applicato al core delle stelle di sequenza principale ci consente di farci un'idea generale sul modo in cui si struttura il trasporto dell'energia dal centro alla superficie.

4.6 Cenni sulle reazioni nucleari negli interni stellari

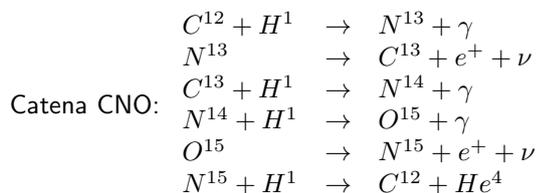
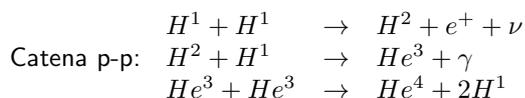
La fonte primaria dell'energia emessa dalle stelle è da ricercarsi nelle reazioni nucleari che hanno luogo nel loro interno. In particolare nelle stelle che occupano la sequenza principale le reazioni nucleari avvengono al centro della struttura, laddove le condizioni di temperatura, densità e composizione chimica sono favorevoli alla fusione dell'idrogeno (l'elemento più abbondante) in elio. Il fatto poi che la massa di un nucleo di elio sia un po' minore della somma delle masse dei 4 protoni che intervengono nella catena di reazioni nucleari fa sì che la stella possa trasformare una piccola frazione della massa in energia per produrre la luminosità osservata.

È interessante notare che durante la fase di sequenza principale una stella trasforma in elio circa il 10% della sua massa di idrogeno e, siccome nella trasformazione $H \rightarrow He$ il difetto di massa percentuale è pari a $\Delta m/m = 0.007$, possiamo stimare il tempo che trascorre una stella sulla sequenza. Per il Sole, utilizzando i valori osservati di massa e

luminosità totale, si ricava per il tempo di vita sulla sequenza principale:

$$t_{\text{MS}} \simeq 0.007 \times \frac{0.1 M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \simeq 10^{10} \text{ anni}$$

Le due principali modalità con cui avvengono le reazioni $\text{H} \rightarrow \text{He}$ in ambiente stellare sono note come **catena p-p** e **catena CNO**. Ognuna di queste può poi avere diverse variazioni anche se qui ci limitiamo a riportare solo le reazioni principali.



Nelle precedenti e^+ è il positrone che si annichila rapidamente con un elettrone e^- emettendo la corrispondente energia in forma di radiazione, ν è il neutrino, e γ il fotone.

Di queste due catene la p-p è favorita dal fatto che la barriera di potenziale coulombiano da superare è minore, anche se questo fatto è in parte controbilanciato dalla difficoltà di emettere un e^+ nella prima delle reazioni. Nelle condizioni dei centri stellari una buona frazione di collisioni tra protoni si risolve in una interazione di tipo elastico. Se tuttavia il positrone viene emesso, le altre due reazioni procedono speditamente. Si noti poi che le prime due reazioni devono avvenire due volte per consentire alla terza di produrre l' He^4 .

Il ciclo CNO invece utilizza i nuclei di carbonio, azoto ed ossigeno come catalizzatori per trasformare H in He. Si nota infatti che alla fine di ogni ciclo (che può iniziare da una qualsiasi delle reazioni) si ottiene sempre un nucleo di He^4 a partire da 4 protoni. La reazione più lenta in questa catena è la cattura di un protone da parte di N^{14} , cosa che rende inattivo il ciclo CNO a quelle temperature alle quali invece il ciclo p-p già comincia a produrre energia. Se indichiamo con ϵ la velocità di generazione di energia possiamo schematizzare dicendo che le velocità di reazione dei cicli p-p e CNO saranno diverse da zero solo dopo aver superato la corrispondente soglia di energia, essendo più bassa quella per il p-p. Da notare che, una volta superata la soglia di energia, la dipendenza dalla temperatura può essere espressa da $\epsilon \propto T^n$, con l'esponente n a sua volta debolmente dipendente sia dalla temperatura che dalla densità. Nel caso del ciclo p-p l'esponente della temperatura vale $n \simeq 4$, mentre per il ciclo CNO si ha $n \simeq 15$, determinando così una grande differenza di comportamento nei due casi.

Infatti stelle di massa minore di $M_* < 1.2 M_{\odot}$, non raggiungendo temperature centrali tali da attivare la catena CNO, utilizzano la sola catena p-p per produrre la loro luminosità. Diversamente si comportano le stelle di massa maggiore le cui temperature

centrali sono più elevate ($T_c \propto M^{1/3}$) e tali da attivare la catena CNO. Questa avendo una fortissima dipendenza dalla temperatura rapidamente domina sul ciclo p-p e produce la maggior parte dell'energia irradiata dalle stelle massive.

Nel caso del ciclo p-p, a causa della più debole dipendenza dalla temperatura, la zona di produzione dell'energia è distribuita su un grande volume centrale, corrispondente alla regione in cui si supera la temperatura di soglia. La funzione radiale della luminosità $L(r)$ quindi varia con continuità all'aumentare di r così che il flusso di energia può essere trasportato efficientemente per via radiativa e viene rispettato il criterio espresso dalla relazione (4.55).

Nel caso del ciclo CNO si richiede ovviamente che la composizione chimica della stella includa questi elementi, e quindi che essa si sia formata a partire da un gas già arricchito dagli elementi pesanti prodotti da generazioni precedenti di stelle. Se questi sono presenti, la più forte dipendenza della velocità di produzione di energia con la temperatura fa sì che la maggior parte dell'energia sia prodotta in una ristretta regione centrale dove la temperatura supera la soglia del ciclo CNO. Una simile sorgente produce la luminosità stellare entro un volume contenente troppo poca massa per poter trasportare efficientemente l'energia prodotta attraverso la sola via radiativa. Viene quindi violata la condizione (4.55) e si instaura la convezione nelle regioni centrali della stella. A causa di questo meccanismo il volume del core convettivo aumenta all'aumentare della massa fino a coinvolgere il 50% della massa quando la massa totale della stella è di $M \simeq 15M_{\odot}$.

La Figura 4.10 mostra in forma compatta la variazione della struttura del trasporto dell'energia negli interni al variare della massa stellare.

4.7 Scala dei tempi stellari

Le scale temporali che caratterizzano la vita delle stelle sono strettamente legate ai processi fisici dominanti nelle varie fasi evolutive. È possibile comunque associare ad ogni fase un tempo caratteristico che possiamo valutare con semplici considerazioni basate sulla identificazione del meccanismo dominante. Iniziamo con il considerare processo che porta alla formazione di una stella. Il meccanismo della contrazione parte da una instabilità gravitazionale all'interno di una nube interstellare di gas e polveri (detta nube molecolare genitrice) ed il tempo impiegato dalla nube per portare a termine la contrazione viene detto *tempo di caduta libera* o anche *free-fall time*. Nella vita delle stelle si susseguono poi altre due scale temporali che sono, nell'ordine, il *tempo di Kelvin-Helmholtz* ed il *tempo nucleare*. Qui di seguito, usando considerazioni piuttosto semplici, valuteremo almeno l'ordine di grandezza di questi tempi caratteristici.

- Tempo di caduta libera

Il *tempo di caduta libera* (detto anche *tempo dinamico* o *tempo di free-fall*) corrisponde alla scala temporale in cui, sotto l'effetto della auto-gravità, si svolge la contrazione libera di una configurazione gassosa. Per valutarlo consideriamo una nube sferica di gas che collassa liberamente e per la quale l'interazione dominante è la gravità (in questa fase la pressione non gioca ancora un ruolo significativo). Questa situazione corrisponde praticamente ad un *non-equilibrio* idrostatico per cui dovremmo riscrivere l'equazione (4.21) come una disequazione:

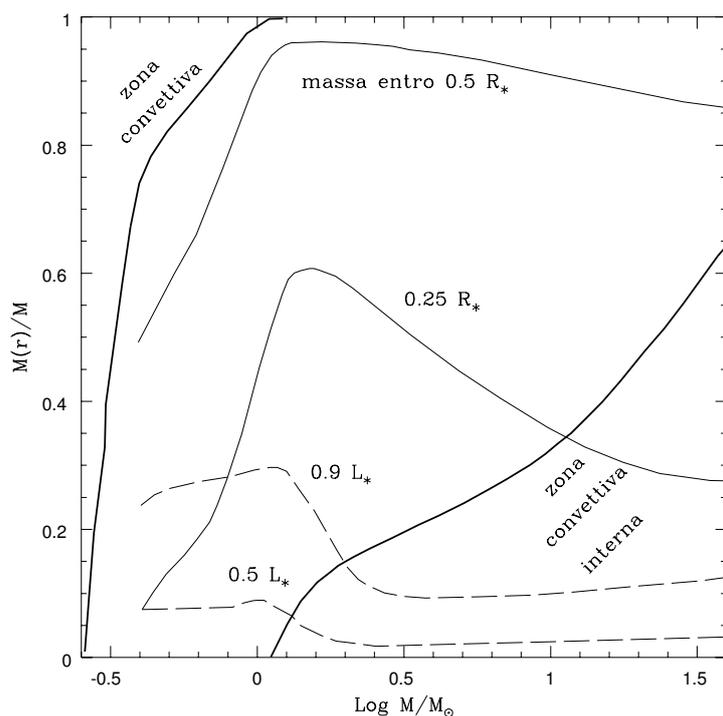


Figura 4.10: Struttura del trasporto dell'energia negli interni stellari. In ascissa è riportata la massa in unità solari, in ordinata la frazione della massa totale della stella. La linea continua più marcata (a sinistra) delimita la zona convettiva esterna dei modelli di sequenza principale. Si noti che ad $1 M_{\odot}$ solo una piccola regione superficiale della struttura è convettiva e che al diminuire della massa la profondità di questa zona convettiva tende ad aumentare. Viceversa per masse maggiori della massa solare la regione convettiva esterna scompare ed il modello prevede lo sviluppo di zone convettive centrali le cui dimensioni aumentano all'aumentare della massa della stella. Le altre linee continue a tratto più sottile mostrano il valore della massa accumulata dalla struttura entro $0.5 R_*$ e $0.25 R_*$, mentre le linee tratteggiate si riferiscono alla massa che produce la frazione indicata della luminosità totale.

$$\frac{1}{\rho(r)} \left| \frac{dP(r)}{dr} \right| < \frac{GM(r)}{r^2} \quad (4.56)$$

in cui gli effetti della gravità dominano su quelli del gradiente di pressione. Questo squilibrio porta naturalmente ad una accelerazione del gas verso il centro di gravità e quindi, se assumiamo per semplicità che il moto sia uniformemente accelerato, possiamo scrivere:

$$\alpha R = \frac{1}{2} \ddot{r} t^2 \quad (4.57)$$

dove con αR abbiamo indicato lo spazio percorso nel tempo t , essendo $\alpha < 1$ ed R il raggio della configurazione che collassa. Da questa relazione è ora facile ricavare il tempo che caratterizza il collasso:

$$t = \left(\frac{2\alpha R}{\ddot{r}} \right)^{1/2} \quad (4.58)$$

Per esplicitare \ddot{r} ricordiamo ora che la forza per unità di massa che agisce sul sistema è data proprio dallo squilibrio espresso dall'equazione (4.56) per cui possiamo scrivere:

$$\ddot{r} = \frac{GM(r)}{r^2} - \frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right| = \frac{GM(r)}{r^2} \left[1 - \frac{\frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dr} \right|}{G \frac{M(r)}{r^2}} \right] \quad (4.59)$$

Se sostituiamo quest'ultima espressione nella equazione (4.58) otteniamo:

$$t = \left(\frac{2\alpha R r^2}{GM(r) [\dots]} \right)^{1/2} \quad (4.60)$$

dove con il simbolo [...] abbiamo indicato il termine tra parentesi quadre nella (4.59) che, nel caso di caduta libera con la gravità dominante sulla pressione, trascureremo visto che è sempre [...] $\simeq 1$. Per farci un'idea dell'ordine di grandezza immaginiamo di essere al bordo della nube in contrazione (quindi ad $r = R$) e domandiamoci quanto tempo ci vorrà per collassare fino al centro della struttura (quindi il caso $\alpha = 1$) nelle condizioni date. Con queste posizioni si ottiene:

$$t_{ff} \simeq \sqrt{\frac{2 R^3}{GM}} = \left[\frac{2}{G \frac{4}{3} \pi \rho} \right]^{1/2} \simeq 0.04 \left(\frac{\rho_{\odot}}{\rho} \right)^{1/2} \text{ giorni} \quad (4.61)$$

dove abbiamo usato il simbolo $_{ff}$ per indicare che si tratta del tempo di free-fall e abbiamo espresso il tempo in giorni introducendo la densità media del Sole $\rho_{\odot} \simeq 1.4 \text{ g cm}^{-3}$. Da un confronto con l'equazione (2.3) vediamo come questo risultato sia in completo accordo con quanto già ricavato nella discussione del criterio di Jeans per l'instabilità gravitazionale. Da notare inoltre come questo tempo sia anche caratteristico di ogni fenomeno di allontanamento dall'equilibrio idrostatico e quindi anche caratteristico delle oscillazioni della struttura stellare come avviene nel caso di stelle pulsanti di tipo Cefeide, RR Lyr, Mira Siccome la densità media delle stelle di sequenza principale varia tra ~ 0.005 (tipo spettrale O5-V) e ~ 5 (tipo spettrale M0-V) g cm^{-3} possiamo concludere che i tempi di oscillazione sulla main sequence possono variare tra 0.02 e 0.66 giorni. Se però

consideriamo una nube interstellare con densità tipica di $\sim 10^{-20}$ g cm $^{-3}$ (pari ad una densità in numero di $\sim 10^4$ cm $^{-3}$) otteniamo $t_{ff} \sim 10^6$ anni che è il tempo tipico per la formazione di una stella.

- Tempo di Kelvin-Helmholtz

Una volta che, trascorso il tempo di free-fall, si sarà formata una nuova configurazione, il collasso tende ad arrestarsi allorquando si sarà sviluppato un gradiente di pressione che tende a stabilizzare la struttura. Tuttavia, pur avendo raggiunto un quasi-equilibrio idrostatico, la struttura non è ancora in equilibrio dal punto di vista energetico. Questo è dovuto al fatto che, specialmente nella fase finale del free-fall quando la struttura diventa opaca alla radiazione, non si riesce a smaltire l'energia termica in eccesso che è pari alla metà dell'energia gravitazionale come prescritto dal teorema del viriale (4.41):

$$E_{th} = -\frac{\Omega}{2} \simeq \frac{GM^2}{2R} \quad (4.62)$$

La stella appena formata ha quindi bisogno di tempo per liberarsi dell'eccesso di energia termica interna. Per stimare questo tempo utilizziamo il rapporto tra energia in eccesso e luminosità:

$$t_{KH} \simeq E_{th}/L = \frac{GM^2}{2LR} \simeq 2 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \frac{L_\odot}{L} \frac{R_\odot}{R} \text{ anni} \quad (4.63)$$

dove massa M , luminosità totale L e raggio R della stella sono stati normalizzati ai valori solari. Siccome in questa fase le grandezze in gioco hanno valori che sono ormai dello stesso ordine di quelli tipici della sequenza principale, possiamo dire che il tempo di assestamento termico, detto in gergo "Tempo di Kelvin-Helmholtz", per il Sole è dell'ordine di $t_{KH} \sim 10^7$ anni. Si noti che, siccome la luminosità delle stelle è una forte funzione della massa, i tempi di assestamento termico sono molto diversi per le diverse masse. P.es. per una stella di massa maggiore con $M=10 M_\odot$, $R=5 R_\odot$, $L=10^4 L_\odot$ si ottiene $t_{KH} \simeq 4 \cdot 10^4$ anni, mentre una stella di massa minore con $M=0.1 M_\odot$, $R=0.15 R_\odot$, $L=10^{-2} L_\odot$ darebbe $t_{KH} \simeq 10^8$ anni.

- Tempo nucleare

Nell'evoluzione di una stella la fase di sequenza principale è caratterizzata dalla conversione di H in He che avviene nel core e dal fatto che la luminosità della stella è tutta dovuta all'energia emessa dalle reazioni nucleari. In queste condizioni allora il tempo necessario per osservare dei cambiamenti significativi nella posizione di una stella nel diagramma HR sarà legato al depauperamento del combustibile (in questo caso l'idrogeno H) presente nel core stellare. Potendo ragionevolmente assumere che nella fase di sequenza principale una stella converta circa un decimo della sua massa da H in He, possiamo stimare la durata di questa fase scrivendo:

$$t_n \simeq \frac{M}{10} 0.007 c^2 \frac{1}{L} \simeq 10^{10} \frac{M}{M_\odot} \frac{L_\odot}{L} \text{ anni} \quad (4.64)$$

dove la costante 0.007 rappresenta la frazione di massa convertita in energia dalla reazione nucleare $H^1 \rightarrow He^4$. Per il Sole quindi la stima del tempo nucleare è

$t_n \simeq 10^{10}$ anni, mentre per stelle di massa diversa si stimano tempi molto diversi a causa della forte dipendenza tra massa e luminosità (vedi la relazione 1.4).

È interessante a questo punto valutare l'andamento dei rapporti tra questi tempi caratteristici per farsi un'idea di come le cose si tengano insieme:

$$\frac{t_n}{t_{KH}} \simeq 10^{-3} \frac{Mc^2}{GM^2/R} \simeq 10^3 \frac{R}{R_\odot} \frac{M_\odot}{M} \quad (4.65)$$

e che:

$$\frac{t_{KH}}{t_{ff}} \simeq \frac{GM^2/(LR)}{\sqrt{R^3/(GM)}} \simeq 6 \times 10^{11} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2.5} \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-1} \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{-2.5} \quad (4.66)$$

Dalle considerazioni fatte finora sulle scale temporali caratteristiche dell'evoluzione delle stelle, possiamo concludere riassumendo il tutto nella seguente relazione schematica:

$$t_{ff} \ll t_{KH} \ll t_n \quad (4.67)$$